جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش وپرورش
اداره کل آموزش وپرورش استان مازندران
اداره آموزش و پرورش شهرستان آمل

نوبت: دی ماه ۴۰۱
تاریخ امتحان: ۴۰۱/۱۰/۱۰
زمان امتحان: ۹۰دقیقه

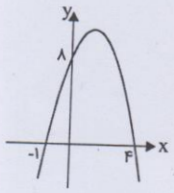
مهر آموزشگاه

نام نام خانوادگی دانش آموز :

نام درس: حسابان۱ | پایه : یازدهم | رشته : ریاضی | صفحه(۱)

ردیف	شرح سوال	بارم

۱ معادلهٔ سهمی زیر را بنویسید. (۱٫۵ نمره)



۲ معادلهٔ زیر را حل کنید. (۱٫۵ نمره)

$$\sqrt{۵x+۶}-\sqrt{x+۲}=۲$$

۳ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-۴}{x^۳+۲x^۲-x-۲}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{۱, a, b\}$ است. حاصل $a\cdot b$ را بیابید. (۱٫۵ نمره)

۴ جواب معادلهٔ زیر را به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

$$\frac{x^۲}{x^۲-۱}-\frac{x-۱}{x+۱}=۲x-۱$$

۵ اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، از رابطهٔ $S_n=۲n^۲+۳n$ به دست آید، جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید. (۱ نمره)

۶ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{-x^۲+۴x+۵}}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}}$ را به دست آورید. (۱ نمره)

۷ معادلات دو ضلع یک مربع به‌صورت $۲x-y=\frac{۹}{۲}$ و $۲y-۴x=۱$ است. مساحت مربع چقدر است؟ (۱٫۵ نمره)

۸ اگر دو تابع $f(x)=ax+b$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{۴x^۲-۱}{۲x+۱} & ;x\neq c\\ d & ;x=c\end{cases}$ برابر باشند، مقادیر a، b، c و d را به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

۹ نمودار تابع $y=۲x+[x]$ را در بازهٔ $[-۲,۲]$ رسم کنید. (۱٫۵ نمره)

۱۰ به روش هندسی نامعادلهٔ $|x-۱|\leq x+۱$ را حل کرده و مجموعهٔ جواب را به‌صورت بازه نشان دهید. (۱٫۵ نمره)

lms.bamdadedu.com

۱۱ برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}-۳}$ را تعیین کنید. (۱٫۵ نمره)

۱۲ نقطهٔ $A(-۱,۴)$ رأس یک مستطیل و خطوط $۲x-y=۹$ و $x+۲y=۱۴$، معادلهٔ دو ضلع آن هستند. مساحت این مستطیل را به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

۱۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ;x<۰\\ ۱-\sqrt{x} & ;x\geq ۰\end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

۱۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۴=۰$ باشند، حاصل عبارت $۴(\alpha\beta^۴+\beta\alpha^۴)$ را به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

lms.bamdadedu.com

سؤال ۱)

$$y = k(x+1)(x-4) \xrightarrow{A(0,8)} k(0+1)(0-4) = 8$$

$$\Rightarrow -4k = 8 \Rightarrow k = \frac{8}{-4} = -2$$

$$\Rightarrow y = -2(x+1)(x-4) = -2(x^2 - 3x - 4) = -2x^2 + 6x + 8$$

سؤال ۲)

$$\sqrt{5x+6} - \sqrt{x+2} = 2 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}} 5x+6 - 2\sqrt{(5x+6)(x+2)} + x + 2 = 4$$

$$\Rightarrow 5x+6 - 2\sqrt{5x^2+16x+8} + x + 2 = 4 \Rightarrow 6x + 8 - 2\sqrt{5x^2+16x+8} = 4$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{5x^2+16x+8} = -6x - 4 \xrightarrow{\div(-2)} \sqrt{5x^2+16x+8} = 3x + 2 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}}$$

$$5x^2 + 16x + 8 = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{یا} \\ \rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{یا} \end{cases}$$

سؤال ۳)

$$f(x) = \frac{x-4}{x^3+2x^2-x-2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \underbrace{\{1, a, b\}}_{\text{ریشه‌های صفرج}} \Rightarrow g(x) = x^3+2x^2-x-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1) = 0 \\ g(a) = 0 \\ g(b) = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1)$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-1, b=-2 \text{ یا } a=-2, b=-1$$

$$\Rightarrow ab = (-1)(-2) = 2$$

سؤال ۴)

$$S_n = 2n^2 + 3n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right] \xrightarrow{S_1 = a_1} S_1 = a_1 = 2(1)^2 + 3(1) = 5$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[5 + a_n\right] = n(2n+3) \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{از طرفین } n \text{ را ساده}} \frac{1}{2}\left[a_n + 5\right] = 2n+3 \xrightarrow{\times 2} a_n + 5 = 4n + 6$$

$$\Rightarrow a_n = 4n + 1$$

lms.bamdadedu.com
Scanned with CamScanner

سوال ۵)

$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = 2x-1 \rightarrow$ کوچک مضرب مشترک $= x^2-1 = (x-1)(x+1)$

$\Rightarrow (x^2-1)\times\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = 2x-1\right) \times (x^2-1) \quad = x^2 - (x-1)^2 = (2x-1)(x^2-1)$

$\Rightarrow x^2 - (x^2-2x+1) = 2x^3 - 2x - x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2x^3 - 2x - x^2 + 1$

$\Rightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2(2x-1) - 2(2x-1) = 0 \rightarrow (2x-1)(x^2-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} & \text{یا} \\ x^2-2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} & \text{یا} \end{cases}$

سوال ۶)

$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{\sqrt{x^2-4x+2}} \rightarrow \begin{cases} 1) -x^2+4x+5 \geq 0 \rightarrow [-1,5] & ① \\ 2) x^2-4x+2 > 0 \rightarrow \mathbb{R} - [1,2] & ② \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = ① \cap ② = [-1,1) \cup (2,5]$

سوال ۷)

$\begin{cases} 2x-y = \frac{9}{2} \longrightarrow 2x-y = \frac{9}{2} \xrightarrow{\times(-1)} \boxed{y-2x = -\frac{9}{2}} & ② \\ 2y-4x = 1 \xrightarrow{\div 2} \boxed{y-2x = \frac{1}{2}} & ① \end{cases}$

دو خط ① و ② موازی هستند پس کافی است فاصله‌ی آن‌ها را بیابیم:

$d = \text{ارتفاع مثلث} = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} \rightarrow S = (\sqrt{5})^2 = 5$

سوال ۸)

$f(x) = ax+b \;,\; g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x+1} & , x \neq c \\ d & , x = c \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$

$\Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2} = c} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1} & , x \neq -\frac{1}{2} \\ d & , x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x \neq -\frac{1}{2} \\ d & , x = c \end{cases}$

$ax+b = 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=2} \\ \boxed{b=-1} \end{cases}$

$d = f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -1-1 = -2$

lms.bamdadedu.com

Scanned with CamScanner

سؤال ۹)

$y = 2x + [x]$ $\quad [-2, 2]$

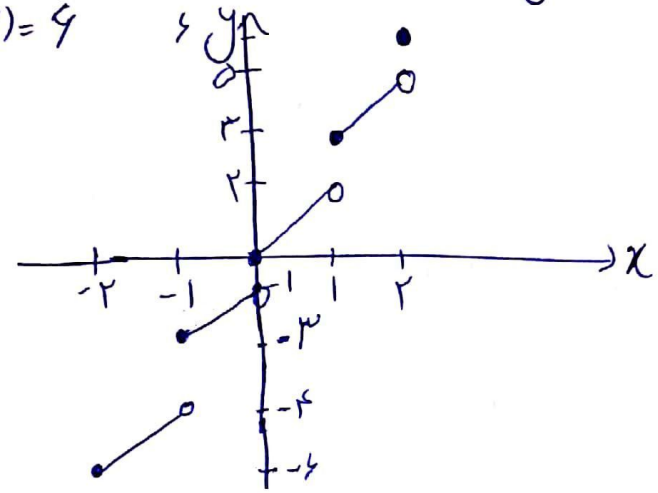
$-2 \le x < -1 \rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = 2x - 2$, $A\left|\begin{matrix}-2\\-6\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right.$

$-1 \le x < 0 \rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 2x - 1$, $A'\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right.$, $B'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$

$0 \le x < 1 \rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 2x$, $C\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$, $D\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

$1 \le x < 2 \rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$, $E\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$, $F\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$

$f(2) = 5$ ؛



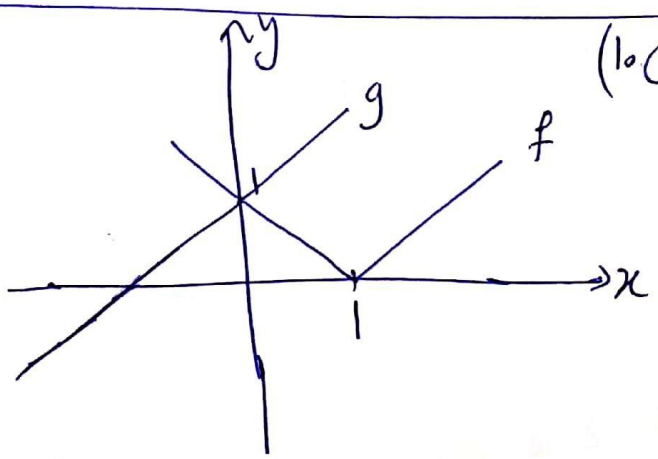
سؤال ۱۰)

$|x-1| \le x+1 \Rightarrow f(x) = |x-1|$, $g(x) = x+1$

$f(x)$ $\quad g(x)$

نقطه‌ی $(x=0)$ جواب مشترک معادله‌ی $f(x)=g(x)$ است پس

$\Rightarrow f(x) \le g(x) \Rightarrow [0, 1)$



سؤال ۱۱)

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \rightarrow \sqrt{x}\, f(x) - 3f(x) = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x}\, f(x) - \sqrt{x} = 3f(x) + 2$

$\Rightarrow \sqrt{x}\left(f(x) - 1\right) = 3f(x) + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{3f(x)+2}{f(x)-1}$

$\Rightarrow \dfrac{3f(x)+2}{f(x)-1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{2}{3} \rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x}+6 = -2\sqrt{x}+6 \\ f(x) = 1 \rightarrow \text{ج ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow 5\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$

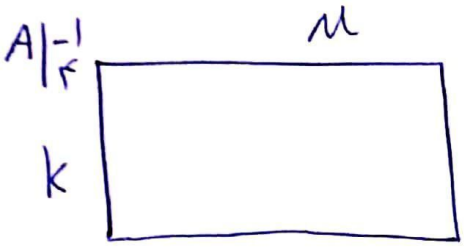
$\Rightarrow \boxed{[0, +\infty)}$

lms.bamdadedu.com
Scanned with CamScanner

سؤال ۱۲) خطوط (۱) و (۲) برهم عمودند $\Rightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}$

$$\begin{cases} 2x - y = 9 & (1) \\ x + 2y = 14 & (2) \end{cases}$$

$A\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$



نقطه A در هیچ کدام از معادلات (۱) و (۲) صدق نمی‌کند پس داریم:

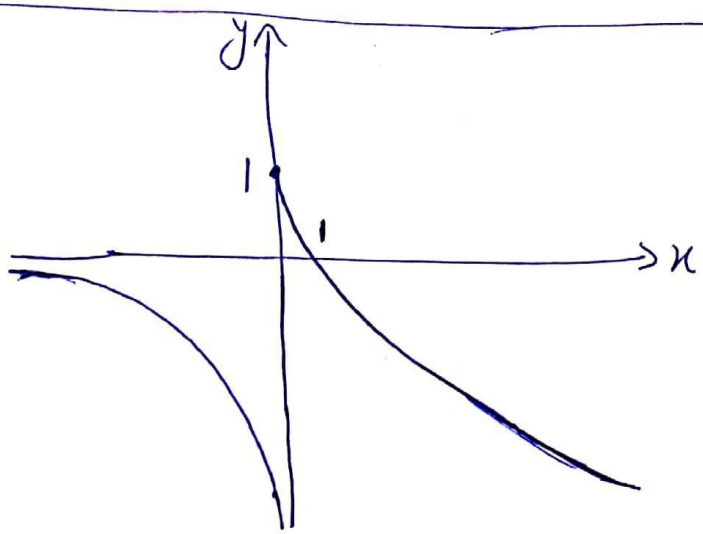
$$\rightarrow m = \frac{|2(-1) - (4) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

$$\rightarrow k = \frac{|-1 + 2(4) - 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-1 + 8 - 14|}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = mk = 3\sqrt{5} \times \frac{7}{\sqrt{5}} = 21$$

سؤال ۱۳)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow R_f = (-\infty, 1]$$

سؤال ۱۴)

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$4(\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4) = 4\alpha\beta(\beta^3 + \alpha^3)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\alpha\beta\left((\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right)$$

$$\Rightarrow 4(\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4) = 4(1)\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3(1)\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$= 8\left(\frac{125}{8} - 15\right) = 8\left(\frac{5}{8}\right) = 5$$

lms.bamdadedu.com
Scanned with CamScanner