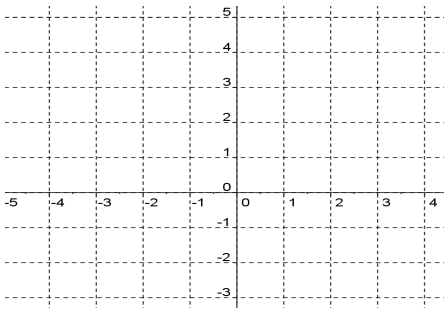
| | | |
|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی: | **بسمه تعالی**<br>سازمان آموزش و پرورش استان قم<br>اداره آموزش و پرورش ناحیه ۲ قم<br>**آموزشگاه:** دبیرستان استعدادهای درخشان دکتر شهریاری | نمره: به عدد: . . . . . .<br>به حروف: . . . . .<br>**نام و نام خانوادگی و امضای دبیر:**<br>. . . . . |
| آزمون درس: **حسابان ۱** | پایه و رشته : **یازدهم ریاضی** مدت آزمون : **۱۳۰ دقیقه** | تاریخ آزمون : **۴۰۱ / ۳ / ۸** |

**آنکه در جستجوی دانش است، بهشت در جستجوی اوست.**

نبی اکرم (ص)

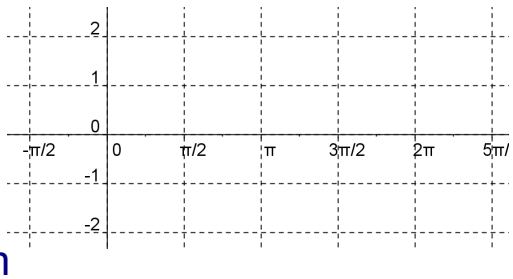
| | **تعداد سوالات، ۱۷ سوال می باشد.** | |
|---|---|---|
| ۱ | **اگر $\alpha , \beta$ ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $x^2+3x+1=0$ باشد، معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن، به صورت $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد.** | ۱/۵ |
| ۲ | **معادله‌ی زیر را با استفاده از خواص قدر مطلق، حل کنید.**<br>$\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$ | ۱ |
| ۳ | **خطوط $3x+2y=3$ و $2x-3y=2$ دو ضلع یک مستطیل و $A=(2\ ,\ 5)$ یکی از رئوس مستطیل می‌باشد. مساحت مستطیل را تعیین کنید.** | ۱ |
| ۴ | **آیا می‌توان مقداری برای $k$ پیدا کرد به طوری که دو تابع زیر برابر باشند.**<br>$f(x)=x^2-x+1$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & : x\neq 1\\ k+2x & : x=1\end{cases}$ | ۱ |

kermanclass.com

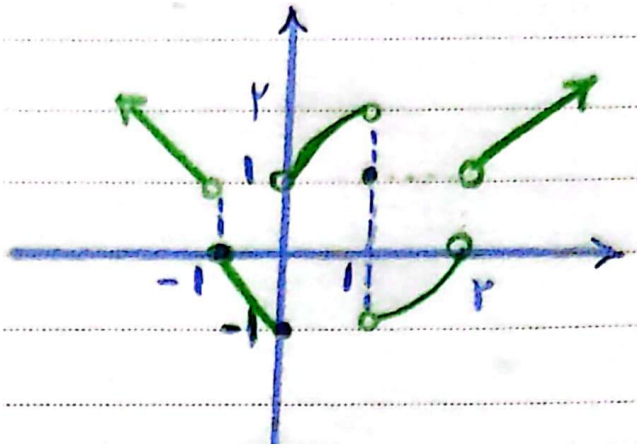
| | | |
|---|---|---|
| ۵ | با فرض اینکه می‌دانیم تابع $\begin{cases} f : [۲ , +\infty) \longrightarrow R \\ f(x) = x^{۲} + ۴x \end{cases}$ وارون‌پذیر است. دامنه و ضابطه‌ی وارون $f$ را تعیین کنید. | ۱ |
| ۶ | اگر $f(x) = x + [x]$ باشد، مجموعه جواب معادله‌ی $f(f(x)) = ۴$ را تعیین کنید. | ۱ |
| ۷ | به روش جبری ثابت کنید تابع $f(x) = x + [x]$ وارون‌پذیر است. | ۰/۵ |
| ۸ | نمودار تابع نمایی $y = ۲^{x} - ۳$ را رسم کنید.  | ۰/۵ |
| ۹ | ابتدا دامنه‌ی معادله‌ی لگاریتمی زیر تعیین، سپس آن را حل کنید و قابل قبول بودن جواب‌ها را به کمک دامنه بررسی کنید. $\log^{۲}_{\sqrt{x}} + ۴\log^{x^{۲}}_{۴} + ۹ = ۰$ | ۱/۵ |

kermanclass.com

| | | |
|---|---|---|
| ۱۰ | اگر داشته باشیم $\log_{۳}^{۲} = a$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \log_{۱۰.۸}^{۷۲}$ را بر حسب a تعیین کنید. | ۱ |
| ۱۱ | حاصل عددی عبارت زیر را تعیین کنید.<br>$\tan(\frac{-۵\pi}{۴}) - ۲\sin(\frac{-۵\pi}{۶}) =$ | ۱ |
| ۱۲ | اگر $\sin ۲\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.<br>$A = \sin(-۷\pi + \alpha) + \cos(\frac{۱۲۱\pi}{۲} + \alpha)$ | ۱ |
| ۱۳ | اتحاد مثلثاتی مقابل را ثابت کنید.<br>$\frac{\cos^۴ x - \sin^۴ x}{\tan x + \cot x} = \frac{۱}{۴}\sin ۴x$ | ۱ |
| ۱۴ | ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کرده، سپس به کمک آن نمودارتابع زیر را رسم کنید.<br>( فقط با ۵ نقطه رسم شود)<br>$y = \sin(x - \frac{\pi}{۴}) - ۲$ | ۱ |




kermanclass.com

| | | |
|---|---|---|
| ۱۵ | نمودار f بصورت زیر مفروض است. حدود زیر را در صورت وجود بیابید.<br><br><br>$\lim_{x\to 0} f(x) =$<br>$\lim_{x\to (-1)^+} f(\lvert x\rvert) =$<br>$\lim_{x\to 1} f(-x^2+2x+1)$ | ۱/۵ |
| ۱۶ | حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ( نماد [ ] به معنی جزء صحیح است)<br>۱) $\lim_{x\to 1} \frac{\lvert x^3-2x^2-x+2\rvert}{\lvert x\rvert-1} =$<br>۲) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos 4x}}{2x+\tan x} =$<br>۳) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^2+2x} =$ | ۳ |
| ۱۷ | تابع $\begin{cases} \frac{x^4-1}{x^2-1} & : \lvert x\rvert<1 \\ a[x]+b & : \lvert x\rvert\geq 1 \end{cases}$ روی R پیوسته است. مقدار a و b را تعیین کنید.( نماد [ ] به معنی جزء صحیح است) | ۱/۵ |
| | قدرتی | ۲۰ |

kermanclass.com

پاسخ نامه حسابان ۱

نام و نام خانوادگی:

نمره: به عدد: ..... به حروف: .....

نام و نام خانوادگی و امضای دبیر:

.....

**بسمه تعالی**

سازمان آموزش و پرورش استان قم

اداره آموزش و پرورش ناحیه ۲ قم

**آموزشگاه:** دبیرستان استعدادهای درخشان دکتر شهریاری

آزمون درس: حسابان ۱ | پایه و رشته: یازدهم ریاضی | مدت آزمون: ۱۳۰ دقیقه | تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۳/۸

**آنکه در جستجوی دانش است، بهشت در جستجوی اوست.**

نبی اکرم (ص)

**تعداد سوالات، ۱۷ سوال می باشد.**

**۱** (۱/۵)

اگر $\alpha$ , $\beta$ ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $x^2+3x+1=0$ باشد، معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن، به صورت $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد.

$x^2+3x+1=0$

$\begin{cases} S=-3 \Rightarrow \alpha+\beta=-3 \\ P=1 \Rightarrow \alpha\beta=1 \end{cases}$

معادله جدید $S' = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{S^2-2P}{P} = \frac{9-2}{1} = 7$

معادله جدید $P' = \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha} = 1$ معادله درجه دوم جدید $x^2-S'x+P'=0 \Rightarrow x^2-7x+1=0$

**۲** (۱)

معادله‌ی زیر را با استفاده از خواص قدر مطلق، حل کنید.

$\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2}=2-x \Rightarrow |x-2|=2-x$

$x\geq 2 \rightarrow x-2=2-x \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ ✓

$x<2 \rightarrow -x+2=2-x \Rightarrow 0=0$

$x\geq 2$ : معادله بینهایت جواب دارد، مجموعه جواب نامعادله برابر

**۳** (۱)

خطوط $3x+2y=3$ و $2x-3y=2$ دو ضلع یک مستطیل و $A=(2,5)$ یکی از رئوس مستطیل می‌باشد. مساحت مستطیل را تعیین کنید.

$3x+2y=3 \rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ (m)

$2x-3y=2 \rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ (m')

دو خط عمود $mm'=-1$

فاصله نقطه A از خط $3x+2y=3$: $|AH| = \frac{|3(2)+2(5)-3|}{\sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$

فاصله نقطه A از خط $2x-3y=2$: $|AH'| = \frac{|2(2)-3(5)-2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$

مساحت مستطیل $|AH|\times|AH'| = \frac{13}{\sqrt{13}}\times\frac{13}{\sqrt{13}} = 13$

**۴** (۱)

آیا می‌توان مقداری برای $k$ پیدا کرد به طوری که دو تابع زیر برابر باشند.

$f(x)=x^2-x+1$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & : x\neq 1 \\ k+2x & : x=1\end{cases}$

$k+(2\times 1) = 1^2-1+1 \Rightarrow 2+k=1 \quad k=-1$

kermanclass.com

Scanned with CamScanner

۵ | با فرض اینکه می‌دانیم تابع $\begin{cases} f:[2,+\infty)\longrightarrow R \\ f(x)=x^2+4x \end{cases}$ وارون‌پذیر است. دامنه و ضابطه‌ی وارون f را تعیین کنید. | ۱

$x = y^2+4y \qquad (y+2)^2-4 = x \qquad y = \sqrt{x+4}-2$

$f(2) = 2^2+4\times 2 = 12$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$D_{f^{-1}} = [12,+\infty) \qquad R_{f^{-1}} = [2,+\infty)$

۶ | اگر $f(x)=x+[x]$ باشد، مجموعه جواب معادله‌ی $f(f(x))=4$ را تعیین کنید. | ۱

$f(x+[x])=4 \Rightarrow f(f(x)) = x+[x]+2[x] = 4 \qquad 4-2[x] = x$

$[x]=0 \rightarrow$ جواب ندارد $\qquad [x]=-1 \rightarrow$ جواب ندارد

$[x]=1 \rightarrow x=1$

$[x]=2 \rightarrow$ جواب ندارد

تنها جواب $x=1$ می‌باشد

۷ | به روش جبری ثابت کنید تابع $f(x)=x+[x]$ وارون‌پذیر است. | ۰/۵

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1+[x_1] = x_2+[x_2] \qquad x_2-x_1 = [x_2]-[x_1]$

چون $x_1$ و $x_2$ حزء اعداد صحیح نمی‌توانند برابر باشند

۸ | نمودار تابع نمایی $y=2^x-3$ را رسم کنید. | ۰/۵

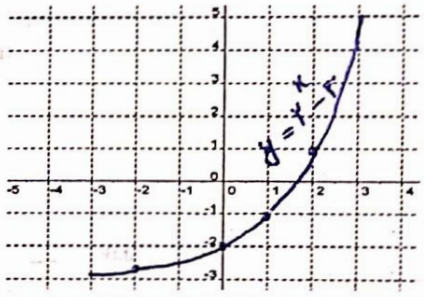
$y(1) = 2-3 = -1 \qquad (1,-1)$

$y(-1) = \frac{1}{2}-3 = -2,5 \qquad (-1,-2,5)$

$y(0) = 1-3 = -2 \qquad (0,-2)$

$y(2) = 4-3 = 1 \qquad (2,1)$

$y(-2) = \frac{1}{4}-3 = -2,75 \qquad (-2,-2,75)$



۹ | ابتدا دامنه‌ی معادله‌ی لگاریتمی زیر تعیین، سپس آن را حل کنید و قابل قبول بودن جواب‌ها را به کمک دامنه بررسی کنید. $\log^2_{\sqrt{x}} + 4\log^{x^2}_{4} + 9 = 0$ | ۱/۵

$D_f = (0,1)\cup(1,+\infty)$ $\qquad x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

$\log_x^2 = -4 \qquad x^4 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \qquad x_3 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ قبول

$\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_x^2 + \frac{8}{2}\log_2^x + 9 = 0 \qquad \log_x^2 = X$

$2X + \frac{4}{X} + 9 = 0 \qquad 2X^2+4 = -9X \qquad 2X^2+9X+4 = 0 \qquad X = \frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{4}$

$X = \frac{-9\pm 7}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -4 \end{cases} \qquad \log_x^2 = -\frac{1}{2} \qquad 2 = x^{-\frac{1}{2}} \qquad 2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x_1 = \frac{1}{4}$ قبول

$x_2 = \frac{1}{16}$ قبول

kermanclass.com

Scanned with CamScanner

۱۰ اگر داشته باشیم $\log_{۳}^{۲}=a$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A=\log_{۱۰۸}^{۷۲}$ را بر حسب a تعیین کنید. ۱

$\log_{۳}^{۲}=a \Rightarrow \log_{۱۰۸}^{۷۲}=\frac{\log ۷۲}{\log ۱۰۸}=\frac{۲\log ۳+۳\log ۲}{۲\log ۳+۲\log ۲}$

$\frac{\log ۲}{\log ۳}=a \rightarrow \log ۲=a\log ۳ \rightarrow \frac{۲\log ۳+۳a\log ۳}{۲\log ۳+۲a\log ۳}=\frac{۲+۳a}{۳+۲a}$

۱۱ حاصل عددی عبارت زیر را تعیین کنید. ۱

$\tan(\frac{-۵\pi}{۴})-۲\sin(\frac{-۵\pi}{۶})=$

$\frac{-۵\pi}{۴}=-\pi-\frac{\pi}{۴} \rightarrow \tan(-\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$ عبارت صورت سوال

$\frac{-۵\pi}{۶}=-\pi+\frac{\pi}{۶} \rightarrow \tan(-\pi+\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$

$\rightarrow -۱-۲(-\frac{۱}{۲})=۱$

۱۲ اگر $\sin ۲\alpha=\frac{۳}{۵}$ و $۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید. ۱

$A=\sin(-۷\pi+\alpha)+\cos(\frac{۱۲۱\pi}{۲}+\alpha)$

$\sin(-۷\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(\frac{۱۲\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\rightarrow A=-۲\sin\alpha$

$\hookrightarrow \cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha \rightarrow \frac{-۴}{۵}=۱-۲\sin^۲\alpha$

$\frac{۹}{۵}=۲\sin^۲\alpha \rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

$\rightarrow A=-۲\sin\alpha=\frac{-۶}{\sqrt{۱۰}}$

$۹۰<۲\alpha<۱۸۰$

$\frac{۹}{۲۵}+\cos^۲۲\alpha=۱ \rightarrow \cos^۲ ۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}$ ($\sin^۲۲\alpha$)

$\rightarrow \cos ۲\alpha=-\frac{۴}{۵}$ غ ظ غ ز

۱۳ اتحاد مثلثاتی مقابل را ثابت کنید. ۱

$\frac{\cos^۴ x-\sin^۴ x}{\tan x+\cot x}=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$

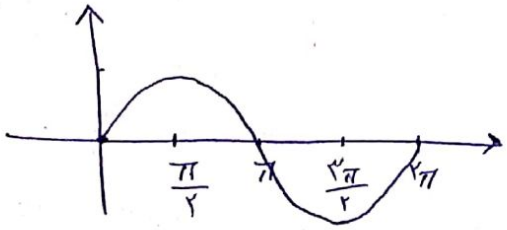
① $\rightarrow (\cos^۲x-\sin^۲x)(\cos^۲x+\sin^۲x)=\cos^۲x-\sin^۲x=\cos ۲x$ (1)

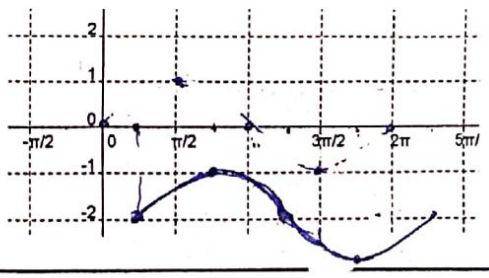
② $\rightarrow \tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{\cos x\sin x}=\frac{۲}{\sin ۲x}$

$\frac{\cos ۲x}{۲}=\frac{\cos ۲x\sin ۲x}{۲}=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$

۱۴ ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ رسم کرده، سپس به کمک آن نمودارتابع زیر را رسم کنید. ۱

$y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})-۲$ (فقط با ۵ نقطه رسم شود)



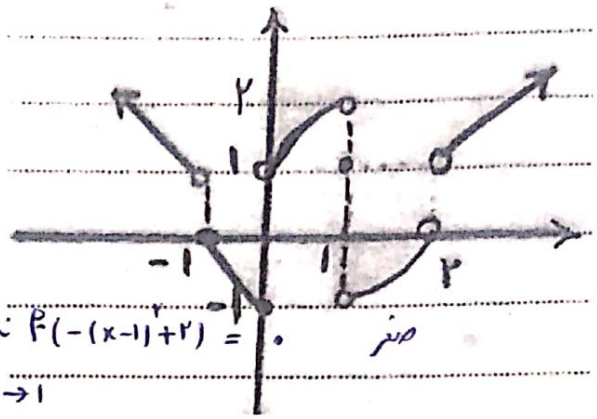

kermanclass.com
Scanned with CamScanner

**۱۵** نمودار f بصورت زیر مفروض است. حدود زیر را در صورت وجود بیابید. **۱/۵**

$\lim_{x\to 0} f(x) =$ ندارد

$\lim_{x\to (-1)^+} f(|x|) = ۲$

$\lim_{x\to 1} f(-x^۲+۲x+۱) = \lim_{x\to 1} f(-x^۲+۲x-۱+۲) = \lim_{x\to 1} f(-(x-1)^۲+۲) =$ صفر




**۱۶** حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ( نماد [ ] به معنی جزء صحیح است) **۳**

۱) $\lim_{x\to 1} \frac{|x^۳-۲x^۲-x+۲|}{|x|-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|(x-۲)(x^۲-1)|}{|x|-1}$ $\xrightarrow{(x-1)(x+1)}$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{(x^۳-۲x^۲-x+۲)}{x-1} = -(x+1)(x-۲) \to ۲$

$\to \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{(x-۲)(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} (x-۲)(x+1) = -۲$

۲) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{۲-۲\cos ۴x}}{۲x+\tan x} = \frac{\sqrt{۲}\sqrt{۱-\cos ۴x}}{۲x+\tan x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{\frac{۱۶x^۲}{۲}}}{۲x+x} = \frac{\sqrt{۲}\times\frac{|۴x|}{۲}}{۳x} = \frac{|۴x|}{۳x}$

$\to \lim_{x\to 0^-} \frac{|۴x|}{۳x} = -\frac{۴}{۳}$

۳) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[۳]{x}+1}{۲x^۲+۲x} = \lim \frac{۱+\sqrt[۳]{x}}{۲x(x+1)} = \lim \frac{۱}{۲x} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+1} = \frac{۱}{-۲}\times\frac{۱}{۱} = -\frac{۱}{۲}$

**۱۷** تابع $\begin{cases} \frac{x^۴-1}{x^۲-1} & : |x|<1 \\ a[x]+b & : |x|\geq 1 \end{cases}$ روی R پیوسته است. مقدار a و b را تعیین کنید. ( نماد [ ] به معنی جزء صحیح است) **۱/۵**

$\begin{cases} \frac{x^۴-1}{x^۲-1} & -1<x<1 \\ a[x]+b & x\geq 1 \\ & x\leq -1 \end{cases}$ $\to$ وقتی در R پیوستگی دارد $\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = a+b \to a+b=۲$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{۰}{۰}$ ساده $\to x^۲+1=۲$

$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) = -۲a+b$

$f(-1) = -a+b$ $\to -۲a+b = -a+b \to a=۰$

$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = ۲$ $\to -a+b=۲ \xrightarrow{a=۰} b=۲$

**۲۰** قدرتی

kermanclass.com
Scanned with CamScanner