| | | |
|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی: | بسمه تعالی<br>مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان<br>دبیرستان شهید دکتر شهریاری<br>دی‌ماه ۱۴۰۲-۱۴۰۱ | نمره به عدد :<br>و حروف :<br>امضاء دبیر:<br>نمره تجدیدنظر به عدد : و حروف :<br>امضاء دبیر: |
| نام درس : حسابان(۱) | | |
| تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۳ | | |
| مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه | | |
| نام دبیر: قدرتی | شماره صندلی : | کلاس : |

**آنکه در جستجوی دانش است، بهشت در جستجوی اوست. نبی اکرم (ص)**

**استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد**

**۱** در دنباله‌ی حسابی $a_n = -3n + 17$ داریم $S_n = -52$. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله‌ی حسابی، تعداد جملات را تعیین کنید. **۲**

$a_1 = 14,\ d = -3 \quad ; \quad S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left[28 + (n-1)(-3)\right] = \frac{n}{2}(31 - 3n) = -52$

$\Rightarrow n(3n - 31) = 104$

با توجه اینکه $13 \times 8 = 104$ می‌توانیم $n = 13$ را جواب بگیریم ؛

$n = 13 \ , \ 3n - 31 = 8 \Rightarrow S_{13} = -52$

**۲** اگر $a = 3^{10}$، مجموع ۱۱ جمله‌ی اول دنباله‌ی $c_n = \frac{2^n + 6^n}{3^n + 9^n}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن، برحسب a بنویسید. **۱**

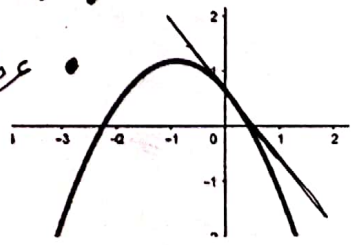
$c_n = \frac{2^n(1 + 3^n)}{3^n(1 + 3^n)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\Rightarrow S_n = \frac{\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{2}{3}} = 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 2\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n}\right)$

$\Rightarrow S_{11} = 2\left(\frac{3^{11} - 2^{11}}{3^{11}}\right) = 2\left(\frac{3a - 2048}{3a}\right)$

**۳** اگر نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ بصورت زیر باشد، علامت $a, b, c$ را با ذکر دلیل تعیین کنید. **۱**

- دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ است.
- عرض از مبدأ مثبت است، پس $c > 0$ است.
- شیب خط مماس بر نمودار در عرض از مبدأ منفی است، پس $b < 0$ است.




kermanclass.com
CamScanner

| | | |
|---|---|---|
| ۴ | اگردر معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-(m+1)x+m=0$ یکی از ریشه‌ها از ۲ برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بزرگتر باشد، مقدار m را تعیین کنید. | ۱/۵ |
| ۵ | اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=ax^3-x^2-5x-2$ و نیز $\alpha$ و $\beta$ دو صفر دیگر تابع باشند، حاصل عبارت $\alpha^4\beta+\alpha\beta^4$ را تعیین کنید. | ۲ |
| ۶ | اگر $x=2$ جوابی برای معادله‌ی $\frac{k}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{20}{9-x^2}$ باشد، سایر جواب‌ها را بیابید. | ۱/۵ |
| ۷ | معادله‌ی گلدانی روبرو را به روش هندسی حل کنید. $\lvert x+2\rvert+\lvert x-1\rvert=5$ | ۱ |

$x^2-(m+1)x+m=(x-1)(x-m)=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=m$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2=2x_1+3 \Rightarrow m=2(1)+3=5 \\ x_1=2x_2+3 \Rightarrow 1=2m+3 \Rightarrow m=-1 \end{cases}$

$f(2)=0 \Rightarrow 8a-4-10-2=8a-16=0 \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow f(x)=2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)$

$=(x-2)(x+1)(2x+1)$

$f(x)=0 \longrightarrow x=2, x=-1, x=-\frac{1}{2}$

بین صفرها $\beta=-\frac{1}{2}, \alpha=-1$ می‌شود.

$\Rightarrow \alpha^4\beta+\alpha\beta^4=(-\frac{1}{2})-(\frac{1}{16})=-\frac{9}{16}$

$\frac{k}{2}-\frac{2}{-1}=\frac{20}{5} \Rightarrow k=4$

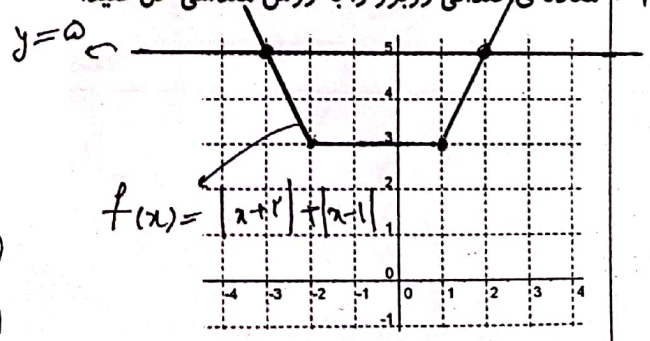
$\Rightarrow \frac{4}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{20}{9-x^2} \xrightarrow{\times x(\frac{9-x^2}{2})} 2(9-x^2)+(x+3)x=20x$

$\Rightarrow 18-2x^2+x^2+3x=10x \Rightarrow x^2+7x-18=(x+9)(x-2)=0$

جواب دیگر می‌شود $x=-9$.

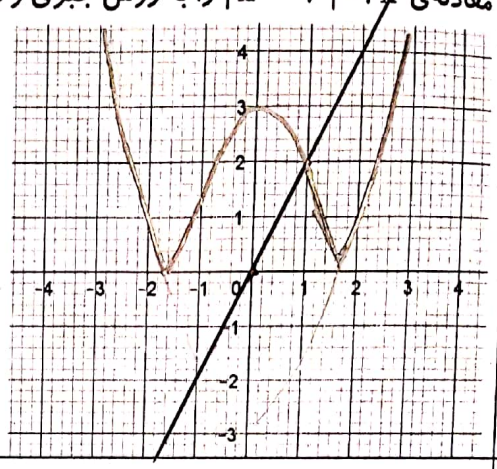
با توجه به نمودار جواب‌های معادله

$x_1=-3$ و $x_2=2$ می‌شود.




kermanclass.com
CamScanner

| | | |
|---|---|---|
| ۸ | معادله‌ی $\lvert x^2-3\rvert = 2x$ را به روش جبری و هندسی حل کنید. | ۲ |
| ۹ | قضیه: نامساوی مثلث در خواص قدر مطلق را نوشته، سپس آن را ثابت کنید. | ۱ |
| ۱۰ | نقاط $A=(2,a)$، $B=(0,3)$ و $C=(-2,-3)$ رئوس مثلث ABC می‌باشند. مقدار a را طوری تعیین کنید تا مثلث در راس A متساوی‌الساقین باشد. | ۱/۵ |
| ۱۱ | دایره‌ای به مرکز $O'=(\sqrt{3}\alpha, 2-\alpha)$ و شعاع $r=2$ بر خط d مماس است. با فرض اینکه $\alpha>2$، مختصات وسط پاره‌خطی را تعیین کنید که دو سر آن مرکز دایره و مبداء مختصات باشد. | ۱/۵ |



* روش هندسی: با ترسیم به شکل معادله ۲ جواب حقیقی دارد.

* روش جبری

✓ $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ : $-x^2+3=2x$

$\Rightarrow x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$ $\xrightarrow{-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}}$ $x=1$

✓ $x\in\mathbb{R}-(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ : $x^2-3=2x$

$\Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$

$x<-\sqrt{3}$ یا $x>\sqrt{3}$ $\longrightarrow$ $x=3$

قضیه: $|a+b|\le|a|+|b| \iff a^2+b^2+2ab\le a^2+b^2+2|ab|$

$\iff ab\le|ab|$

رابطه اخیر درست است و همه روابط بازگشت پذیر است، پس اثبات می‌شود $|a+b|\le|a|+|b|$

نقاط $A=(2,a)$، $B=(0,3)$ و $C=(-2,-3)$ رئوس مثلث ABC می‌باشند. مقدار a را طوری تعیین کنید تا مثلث در راس A متساوی‌الساقین باشد.

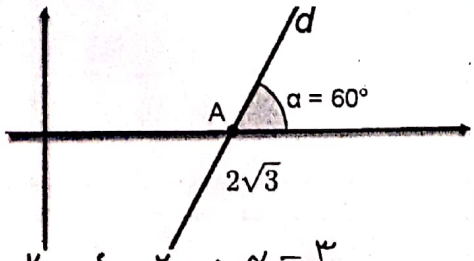
یعنی $AB=AC$

- $AB=\sqrt{(2-0)^2+(a-3)^2}=\sqrt{a^2-6a+13}$
- $AC=\sqrt{(2-(-2))^2+(a-(-3))^2}=\sqrt{a^2+6a+25}$

$\xrightarrow{AB=AC}$ $a^2-6a+13=a^2+6a+25 \Rightarrow 12a=-12$

$\Rightarrow a=-1$

دایره‌ای به مرکز $O'=(\sqrt{3}\alpha, 2-\alpha)$ و شعاع $r=2$ بر خط d مماس است. با فرض اینکه $\alpha>2$، مختصات وسط پاره‌خطی را تعیین کنید که دو سر آن مرکز دایره و مبداء مختصات باشد.




معادله خط d: $y-0=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$

$\Rightarrow y=\sqrt{3}x-6$

فاصله مرکز دایره از d برابر شعاع است.

$r=2=\dfrac{|3\alpha-2+\alpha-6|}{\sqrt{4}}=|2\alpha-4|$ $\xrightarrow{\alpha>2}$ $2\alpha-4=2 \Rightarrow \alpha=3$

مرکز دایره $O'(3\sqrt{3},-1)$ است

$\Rightarrow$ نقطه وسط $=\dfrac{O+O'}{2}=\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{3},-\dfrac{1}{2}\right)$

kermanclass.com

CamScanner

۱

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

آیا دو تابع روبرو مساویند؟ چرا؟

خیر، مساوی نیستند؛ زیرا دامنه‌ی آن‌ها نیست.

$D_f: \frac{x}{x-1}\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$ یا $x>1$

$D_g: \begin{cases} x\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x>1$

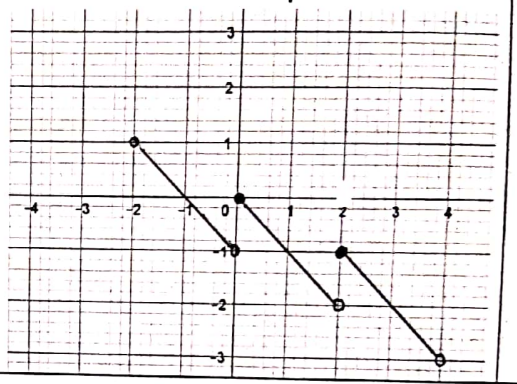
۱

۱۳ نمودار تابع $y=[\frac{x}{2}]-x$ را در فاصله‌ی $(-2, 4)$ رسم کنید. (نماد [ ] به معنی جزء صحیح است)

$-2<x<0 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1 \Rightarrow y=-1-x$

$0\leq x<2 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=0 \Rightarrow y=-x$

$2\leq x<4 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=1 \Rightarrow y=1-x$



۱/۵

۱۴ دو تابع f و g با شرایط زیر مفروض‌اند. دو ضابطه برای تابع g بیابید، سپس معادله‌ی $f(g^2(x))=0$ را با شرط مثبت بودن شیب تابع g، حل کنید.

$f(x)=x^2-2x-15 = (x-1)^2-16$

$f(g(x))=x^2+12x+20 = (g(x)-1)^2-16 \Rightarrow (g(x)-1)^2=(x+6)^2$

$\Rightarrow g(x)-1=\pm(x+4) \Rightarrow \begin{cases} g(x)=x+5 \\ g(x)=-x+5 \end{cases}$

$f(x)=(x-5)(x+3)$

ریشه‌های f، $-3$ و $5$ هستند.

$f(g^2(x))=0 \longrightarrow g^2(x)=5 \Rightarrow (x+1)^2=5 \Rightarrow x+1=\pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$

۰/۵

۱۵ به روش جبری ثابت کنید در رابطه‌ی مقابل، y یک تابع بر حسب x است.

$$x=\frac{y}{|y|+1}$$

$x_1=\frac{y_1}{|y_1|+1}$, $x_2=\frac{y_2}{|y_2|+1}$ $\xrightarrow{x_1=x_2}$ $\frac{y_1}{|y_1|+1}=\frac{y_2}{|y_2|+1}$

$y_1$ و $y_2$ هم علامت‌اند. حال، فرض مثبت بودن داریم:

$\frac{y_1}{y_1+1}=\frac{y_2}{y_2+1}$

۲۰

نمایش در فرم $\longrightarrow y_1=y_2$ (این تابع است) $\Leftarrow$ اگر $y_1$ و $y_2$ را هم منفی بگیریم، همین است.

kermanclass.com

CamScanner