محل مهر

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش پرورش منطقه ۶ تهران

شماره صندلی:
.....

دبیرستان هرزانگان ۶ (دوره دوم)

نام و نام خانوادگی: رشته: وقت امتحان:
پایه: نام دبیر: تاریخ امتحان:
سوالات امتحان درس: نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ تعداد صفحات : صفحه

ردیف		بارم
۱	در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جمله‌های اول و پنجم ۱۶ و مجموع جمله‌های سوم و هفتم ۳۶ می‌باشد، مجموع صد جمله‌ی ابتدایی این دنباله را بیابید.	
۲	دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{3-\lvert x\rvert}$ را بیابید.	
۳	ابتدا نشان دهید $x=1$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^3-2x^2-8x+9=0$ می‌باشد، سپس ریشه‌های دیگر آن را بیابید.	
۴	اگر α,β جواب‌های معادله‌ی $3x^2-5x-3=0$ باشند، معادله‌ی درجه دومی بیابید که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha-1}$ و $\frac{1}{\beta-1}$ باشد.	
۵	صفرهای تابع $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{7}{12}$ را در صورت وجود به دست آورید.	
۶	برای هر دو عدد حقیقی a,b ثابت کنید: $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	
۷	نقاط $A(-1,4)$، $B(4,0)$ و $C(0,-4)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) مثلث را رسم کنید. ب) معادله‌ی ضلع BC را بنویسید. پ) مساحت مثلث را بدست آورید.	
۸	معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $[-2,3]$ و برد آن $[0,6]$ باشد و از نقطه‌ی (۳و۱) بگذرد.	
۹	آیا توابع $f(x)=\sqrt{9x-x^2}+3x$ و $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{9-x}+3x$ مساوی هستند؟ چرا؟	
۱۰	نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=-\sqrt{x-2}+3$ را به کمک نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.	
۱۱	نمودار تابع $f(x)=x+\lvert x\rvert$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ رسم کنید و برد آن را از روی نمودار به دست آورید. آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟	
۱۲	نشان دهید تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x-5)^2-12$ روی بازه‌ی $(-\infty,5]$ وارون‌پذیر است و ضابطه‌ی وارون آن را بیابید.	
۱۳	اگر $f=\{(1,5),(2,0),(3,4),(4,-2),(5,1)\}$ و $g=\{(-1,2),(0,0),(2,3),(4,-3),(5,0)\}$ باشد، توابع $f+g,\frac{g}{f}$ را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.	
۱۴	آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4},g(x)=\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+2}$ مساوی‌اند؟ چرا؟	
۱۵	تابع $f(x)=-\sqrt{x-2}+5$ را در نظر گرفته و به پرسش‌های زیر جواب دهید: الف) نمودار تابع را رسم کنید. ب) یک به یک بودن آن را بررسی کنید. پ) دامنه و برد f و f^{-1} را به دست آورید. ت) در همان دستاهی که نمودار f رسم شده، نمودار وارون آن را رسم کنید.	

جمع نمرات :۲۰
موفق باشید

kermanclass.com

سوال ۱)

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 14 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 4d) = 14 \\ a_3 + a_7 = 34 \Rightarrow (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4d = 14 \quad ① \\ 2a_1 + 8d = 34 \quad ② \end{cases}$$

$$① - ② \Longrightarrow -4d = -20 \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 4d = 14 \xrightarrow{d=5} 2a_1 + 4(5) = 14$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 20 = 14 \Rightarrow 2a_1 = -6 \Rightarrow \boxed{a_1 = -3}$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}\left[2a_1 + 99d\right] = 50\left[2(-3) + 99(5)\right] = 50\left[-6 + 495\right] = 24450$$

سوال ۲)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2 - |x|} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 2)\ 2 - |x| \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2 \end{cases} \xrightarrow[①\cap②]{①,②} D_f = [-2, +\infty) - \{2\}$$

سوال ۳)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 8x + 9 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \hline \\ \hline -x^2 - 8x + 9 & x^2 - x - 9 \\ x^2 - x & \\ \hline -9x + 9 & \\ 9x - 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x-1)(x^2 - x - 9) = 0$$

$$x^2 - x - 9 = 0 \rightarrow \Delta = 37$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{37}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

سوال ۴)

$$3x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \rightarrow$ ریشه‌های معادله درجه دوم

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 \Rightarrow S = \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\beta - 1} = \frac{\alpha + \beta - 2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \\ P = x_1 x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$x_2 = \frac{1}{\beta - 1}$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{1}{\alpha - 1}\right)\left(\frac{1}{\beta - 1}\right) = \frac{1}{-\frac{5}{3}} = \boxed{-\frac{3}{5}} \Rightarrow S = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{\frac{5}{3} - 2}{-1 - \left(\frac{5}{3}\right) + 1}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{5}}$$

kermanclass.com

Scanned with CamScanner

سؤال ۵)

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{7}{12} \Rightarrow f(x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-4x+4}=\frac{7}{12} \xrightarrow{x^2-4x+3=t} \frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{t+1+t}{t(t+1)}=\frac{7}{12} \Rightarrow \frac{2t+1}{t^2+t}=\frac{7}{12} \Rightarrow 12(2t+1)=7(t^2+t)$$

$$\Rightarrow 24t+12=7t^2+7t \Rightarrow 7t^2-17t-12=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-17)^2-4(7)(-12)=625$$

$$\Rightarrow t=\frac{-(-17)\pm\sqrt{625}}{2(7)}=\frac{17\pm25}{14}$$

$$t=\frac{17+25}{14}=\frac{42}{14}=3$$

$$t=\frac{17-25}{14}=\frac{-8}{14}=\frac{-4}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=3 \rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \ \boxed{x=4} \\ x^2-4x+3=-\frac{4}{7} \rightarrow x^2-4x+\frac{25}{7}=0 \end{cases}$$

$$\Delta=(-4)^2-4(1)\left(\frac{25}{7}\right)=16-\frac{100}{7}=\frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{4\pm\sqrt{\frac{12}{7}}}{2}}$$

سؤال ۶)

$$|a+b| \le |a|+|b|$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow -|a| \le a \le |a| \quad (1)$$

$$-|b| \le b \le |b| \quad (2)$$

(1)، (2) جمع جبری (+) $\rightarrow$

$$-|a|-|b| \le a+b \le |a|+|b|$$

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$$

$$\Rightarrow |a+b| \le |a|+|b|$$

---

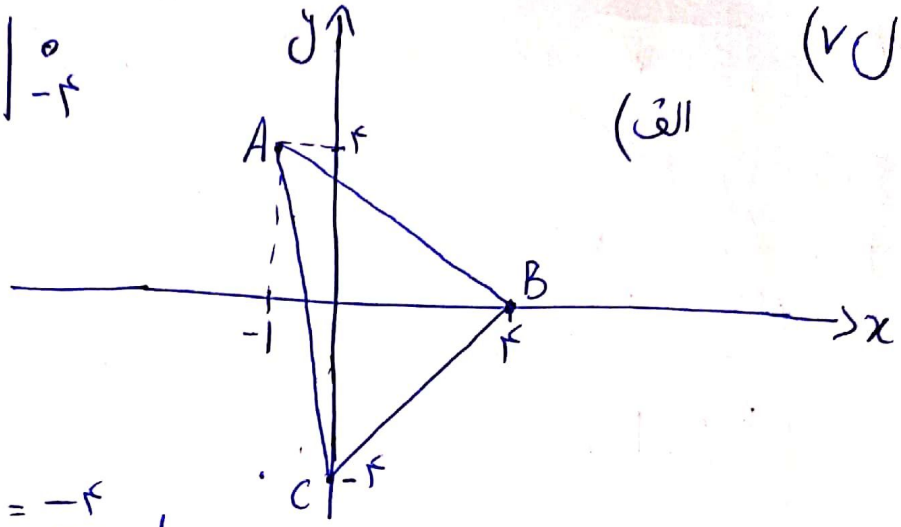
kermanclass.com

Scanned with CamScanner

سؤال ۷)

الف)

$A\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right.$



ب)

$$\left.\begin{matrix}B\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.\\C\left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\} \longrightarrow m_{BC}=\frac{-4-0}{0-4}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$y-y_C=m_{BC}(x-x_C) \xrightarrow{C\left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right.} y+4=1\times(x-0)$$

$$BC \Rightarrow y=x-4$$

پ) $S_{\hat{ABC}}=\frac{AH\times BC}{2}$ برای به دست آوردن مساحت مثلث $\hat{ABC}$، ابتدا (ارتفاع) (AH) را به دست آورده و سپس قاعده (BC) را هم به دست می‌آوریم:

$$B\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right. \\ C\left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right. \longrightarrow BC=\sqrt{(4-0)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

$$A\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right. , BC: y-x+4=0 \rightarrow AH=\frac{|4(1)+(-1)(-1)+4|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_{\hat{ABC}}=\frac{1}{2}\times AH\times BC=\frac{1}{2}\times\frac{9}{\sqrt{2}}\times 4\sqrt{2}=18$$

kermanclass.com

Scanned with CamScanner

سوال ۹)

$f(x)=\sqrt{9x-x^2}+2x \longrightarrow D_f = 9x-x^2 \geq 0 \longrightarrow D_f=[0,9]$

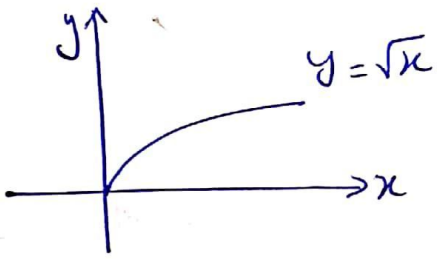
$g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{9-x}+2x \longrightarrow D_g \div \begin{cases} 1) x\geq 0 \\ 2) 9-x\geq 0 \rightarrow x\leq 9 \end{cases} \xrightarrow{①\cap②} D_g=[0,9]$

$g(x)=\sqrt{9x-x^2}+2x$

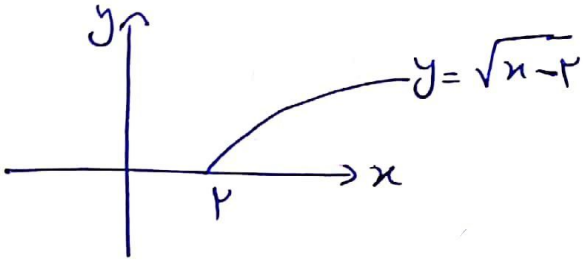
$\Rightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ R_f = R_g \end{cases} \Longrightarrow f(x)=g(x) \longrightarrow$ پس دو تابع مساوی هستند.

سوال ۱۰)

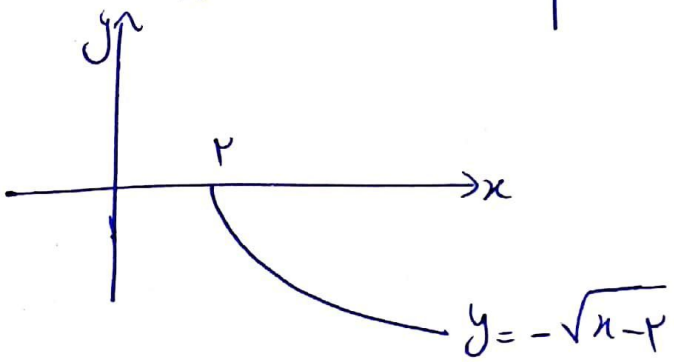
$y=-\sqrt{x-2}+3$



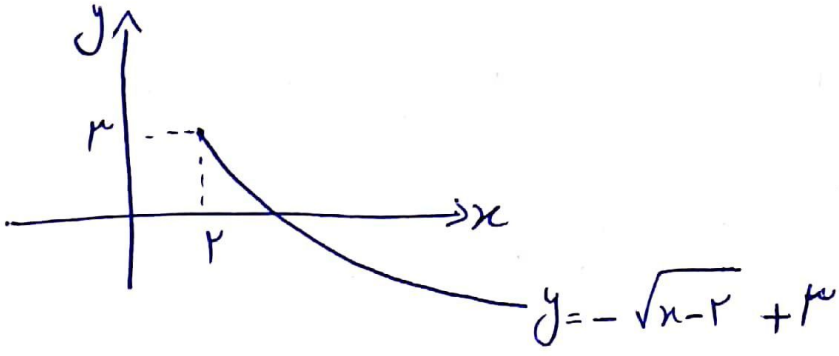
۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم



نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم

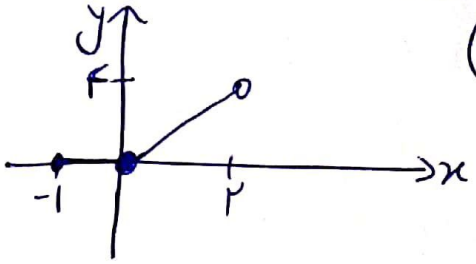


۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم



سوال ۱۱)

$f(x)=x+|x| = \begin{cases} 0 & -1\leq x<0 \\ 2x & 0\leq x<2 \end{cases}$



برد $f = [0,4)$

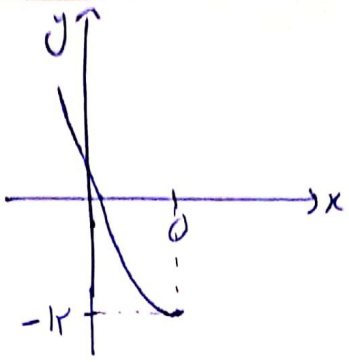
kermanclass.com

Scanned with CamScanner

سؤال ۱۲)

$f(x) = (x-5)^2 - 12$

$(-\infty, 5]$



خطوط موازی محور xها، نمودار تابع را در بازه‌ی $(-\infty, 5]$ فقط در یک نقطه قطع می‌کنند پس وارون‌پذیر است.

$$f(x) = (x-5)^2 - 12 \xrightarrow{x \le 5} y = (x-5)^2 - 12 \Rightarrow y + 12 = (x-5)^2$$

$$\Rightarrow x - 5 = \pm\sqrt{y+12} \xrightarrow{x \le 5} x - 5 = -\sqrt{y+12} \Rightarrow x = -\sqrt{y+12} + 5$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x+12} + 5 \quad , \quad x \ge -12$$

سؤال ۱۳)

$f = \{(1,5), (2,0), (3,4), (4,-2), (5,1)\}$ $\quad g = \{(-1,2), (0,0), (1,3), (3,-3), (5,0)\}$

$f+g = \{(2,2), (4,-5), (5,1)\}$ $\quad \frac{g}{f} = \{(3, \frac{3}{4}), (5,0)\}$

سؤال ۱۴)

$g(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{x+2} = \sqrt{(x-2)(x+2)} = \sqrt{x^2-4}$

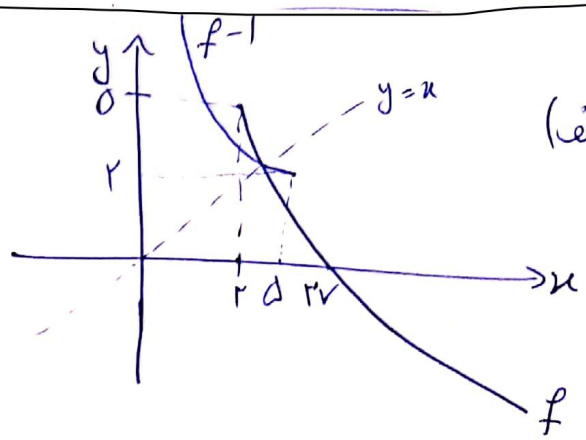
$f(x) = \sqrt{x^2-4}$

$$\begin{cases} D_f: x^2 - 4 \ge 0 \to x \ge 2 \text{ یا } x \le -2 \\ D_g: x^2 - 4 \ge 0 \to x \ge 2 \text{ یا } x \le -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ R_f = R_g \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

یکدیگر هستند

سؤال ۱۵)

الف)



ب) یک به یک است

ج)

$D_f = [2, +\infty)$

$R_f = (-\infty, 5]$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, 5]$

$R_{f^{-1}} = D_f = [2, +\infty)$

kermanclass.com

Scanned with CamScanner