بسمه تعالی

| | | |
|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی: | امتحان شبه‌نهایی ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی فیزیک | ساعت شروع: ۸ صبح |
| نام مدرسه: | نوبت دوم — سوالات پاسخ‌برگ دارد. | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| شهرستان: | استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد. | تاریخ: ۱۴۰۲/۰۱/۲۸ |

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.<br>الف) اگر $\alpha$ یک عدد گویا و $\beta$ گنگ باشد، $3\alpha+\beta$ همواره گنگ است.<br>ب) مجموعهٔ احاطه‌گر یک گراف تهی، مینیمال است.<br>ج) اگر $n$ عددی صحیح باشدآنگاه $3\mid n^3-n$.<br>د) دو مربع لاتین متعامد $6\times6$ وجود دارد. | ۱ |
| ۲ | جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.<br>الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک گراف کامل، ..... عضو دارد.<br>ب) اگر $6\mid a$ و $d=(-2,a)$ آن‌گاه $d$ برابر ..... است.<br>ج) یک گراف را ناهمبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک .... وجود داشته باشد.<br>د) تعداد حالات انتخاب ۵ شاخه گل از بین سه نوع گل طوری که از هر نوع، حداقل یک شاخه داشته باشیم برابر ..... است. | ۱ |
| ۳ | در سؤالات زیر گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.<br>الف) باقیماندهٔ تقسیم اعداد $a$ و $b$ بر ۱۷ به ترتیب ۲ و ۱۱ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3a-5b$ را بر ۱۷ کدام است؟<br>۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱<br>ب) عدد احاطه‌گری گراف $G$ از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۴۰ کدام است؟<br>۱) ۳ ۲) ۲ ۳) حداقل یک است ۴) ۱<br>ج) معادلهٔ $21x+35y=2n+1$ به ازای کدام عدد طبیعی $n$، در $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟<br>۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۱۳ | ۱/۵ |
| ۴ | برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی $a, b$ ثابت کنید: $\frac{a+3b}{2}\geq\sqrt{3ab}$ | ۱ |
| ۵ | برای هر یک مثال نقض بیاورید.<br>الف) اگر $x$ گنگ باشدآنگاه $x^2+6x+5$ نیز گنگ است.<br>ب) تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف $k$- منتظم از مرتبه $n$ برابر $\left\lceil\frac{n}{k+1}\right\rceil$ می‌باشد. | ۱ |
| ۶ | اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $c\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید $a+c\overset{m}{\equiv}b+c$. | ۱ |
| ۷ | معادلهٔ $3x+5y=121$ را در $\mathbb{Z}$ حل کنید. | ۱ |
| ۸ | رقم یکان $3^{1399}-5$ را بیابید. | ۱/۵ |
| ۹ | در هر مورد، گرافی با مشخصات خواسته شده رسم کنید.<br>الف) مرتبهٔ ۶ با حداقل یال و عدد احاطه گری آن یک باشد.<br>ب) همبند، بدون دور از مرتبهٔ ۵ که در آن $\Delta=3$ باشد.<br>ج) ۴ رأسی که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد. | ۱/۵ |

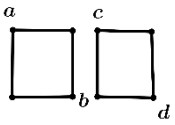
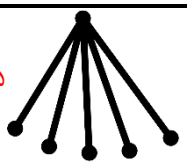
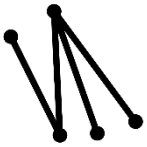
kermanclass.com

CamScanner

| | | |
|---|---|---|
| ۱۰ | با توجه به گراف G ، به سوالات زیر پاسخ دهید. (محاسبات لازم است)<br>الف) $\deg(c)=$ $\delta(G)=$ $\Delta(G)=$<br>ب) دوری به طول ۴ بنویسید.<br>ج) حداقل چند یال دیگر به این گراف اضافه کنیم تا گراف ۵- منتظم از همین مرتبه بدست آید؟<br>د) اگر $N_G(x)=\{b,d,c\}$ ، آنگاه x کدام رأس است؟ | ۲ |
| ۱۱ | با توجه به گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) کران پایین عدد احاطه گری را بنویسید.<br>ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی بنویسید.<br>ج) یک $\gamma$- مجموعه بنویسید. آیا این مجموعه یکتاست؟ | ۱/۵ |
| ۱۲ | ۶ دانش‌آموز و ۵ معلم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف برای گرفتن عکس قرار بگیرند به طوری که:<br>الف) همهٔ معلم‌ها کنار هم قرار گیرند.<br>ب) دانش‌آموزان یک در میان بین معلم‌ها قرار بگیرند. | ۱ |
| ۱۳ | شش توپ فوتبال یکسان، سه توپ والیبال یکسان و یک توپ بسکتبال را به چند طریق می‌توان بین ۱۰ نفر توزیع کرد طوری که هر کدام یک توپ داشته باشند؟ | ۱ |
| ۱۴ | تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+4x_2+x_3+x_4=21$ را با شرایط $x_1>1$ و $x_2\geq 3$ بدست آورید. | ۲ |
| ۱۵ | دو مربع لاتین A و B را در نظر بگیرید:<br>$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline\end{array}$ $B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline\end{array}$<br>الف) آیا A و B متعامدند؟ چرا؟<br>ب) یک مربع لاتین مانند C به گونه‌ای بنویسید که A و C متعامد باشند. ($B\neq C$) روش کار را توضیح دهید. | ۲ |

kermanclass.com

CamScanner

| ردیف | راهنمای آزمون | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | الف) درست ۰/۲۵ ب) درست ۰/۲۵ ج) درست ۰/۲۵ د) نادرست ۰/۲۵ | ۱ |
| ۲ | الف) یک ۰/۲۵ ب) ۲ ۰/۲۵ ج) مسیر ۰/۲۵ د) $\binom{۴}{۲} = ۶$ ۰/۲۵ | ۱ |
| ۳ | الف) گزینه ۳ ۰/۵ ب) گزینه ٤ ۰/۵ ج) گزینه۲ ۰/۵ | ۱/۵ |
| ٤ | $\frac{a+۳b}{۲} \geq \sqrt{۳ab} \Leftrightarrow a+۳b \geq ۲\sqrt{۳ab} \Leftrightarrow a+۳b-۲\sqrt{۳ab} \Leftrightarrow$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{۳b}\right)^{۲} \geq ۰$ ۰/۵ گزاره همیشه درست | ۱ |
| ۵ | الف) اگر $x = \sqrt{۲}-۳$ ۰/۲۵ آنگاه $x^{۲}+۶x+۵ = (x+۳)^{۲}-۴ = (\sqrt{۲}-۳+۳)^{۲}-۴ = ۰ \in \mathbb{Q}$ ۰/۲۵   ۰/۲۵ ب) در گراف مقابل عدد احاطه گری ٤ است در صورتی که $\left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۳} \right\rceil = ۳ \neq ۴$ ۰/۲۵ | ۱ |
| ٦ | $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-c-b \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ | ۱ |
| ۷ | $k \in \mathbb{Z}$ و $y = ۲۳-۳k$ ۰/۲۵ $x = ۵k+۲$ ۰/۲۵ $x \overset{۵}{\equiv} ۲$ ۰/۲۵ $۶x \overset{۵}{\equiv} ۲۴۲$ ۰/۲۵ $۳x \overset{۵}{\equiv} ۱۲۱$ ۰/۲۵ | ۱ |
| ۸ | ۰/۲۵ $۳^{۱۳۹۹}-۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$ $\Rightarrow ۳^{۱۳۹۹}-۵ \overset{۱۰}{\equiv} -۸$ ۰/۲۵ $-۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$ $\Rightarrow ۳^{۱۳۹۹}-۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۳^{۱۳۹۹}-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow (۳^{۲})^{۶۹۹}-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ ۰/۲۵ $۳^{۲}-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ پس رقم یکان ۲ می باشد. ۰/۲۵ | ۱/۵ |
| ۹ | الف) ۰/۵  ب) ۰/۵  ج) ۰/۵  | ۱/۵ |
| ۱۰ | الف) $\deg(c) = ۳$ ۰/۲۵ $\delta(G) = ۱$ ۰/۲۵ $\Delta(G) = ۴$ ۰/۲۵ ب) $abeda$ ۰/۲۵ ج) $pr = ۲q \Rightarrow ۸ \times ۵ = ۲q \Rightarrow q = ۲۰$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ پس ۱۱=۹-۲۰ یال بایستی اضافه شود. د) $x = e$ ۰/۲۵ | ۲ |
| ۱۱ | الف) $\left\lceil \frac{۱۱}{۵+۱} \right\rceil = ۲$ ۰/۵ ب) $\{i,h,a,g,c,e\}$ ۰/۵ ج) $\{j,k\}$ بله یکتاست. ۰/۵ | ۱/۵ |
| ۱۲ | الف) $۷! \times ۵!$ ۰/۵ ب) $۶! \times ۵!$ ۰/۵ | ۱ |
| ۱۳ | $\frac{۱۰!}{۶! \times ۳!} = ۸۴۰$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ | ۱ |
| ۱٤ | $x_۱ > ۱ \Rightarrow x_۱ \geq ۲ \Rightarrow x_۱ - ۲ \geq ۰ \Rightarrow y_۱ = x_۱ - ۲ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۲$ | ۲ |

kermanclass.com

| ردیف | راهنمای آزمون ۰/۵ | نمره |
|---|---|---|
| | $x_2 \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \Rightarrow y_1 + 2 + 12 + x_3 + x_4 = 21 \Rightarrow y_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = 36 & ۰/۵ \\ x_2 = 4 \Rightarrow y_1 + 2 + 16 + x_3 + x_4 = 21 \Rightarrow y_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = 10 & ۰/۵ \end{cases}$<br>**تعداد جواب ها=۴۶=۳۶+۱۰** ۰/۵ | |
| ۱۵ | **الف) بله متعامدند. زیرا برای دو عدد مثل هم از A ، درآیه های نظیر از B مساوی نیستند.** ۰/۵ ۰/۲۵<br>**ب) طبق مثال صفحه ٦٤ کتاب هر جایگشت از B یک مربع لاتین متعامد با A می سازد پس مثلا جایگشت زیر را اعمال می کنیم تا مربع لاتین C ساخته شود.** ۰/۵<br>۲ ــ ۱ ۳ → ۲ ٤ → ۳ ۱ → ٤<br>$C =$ ۰/۷۵ | ۲ |
| **موفقیت شما آرزوی ماست** | | ۲۰ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٤ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ٤ | ۱ |
| ۳ | ۲ | ۱ | ٤ |
| ۱ | ٤ | ۳ | ۲ |

kermanclass.com