بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

دبیرستان علامه حلی۴

آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

شماره :«شماره»

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون : ۸:۰۰

زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته :ریاضی پایه:دوازدهم کلاس:«کلاس» تعداد

ردیف	سوالات	بارم
۱	برای هر سه عدد حقیقی x , y , z ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۱,۵
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۱,۵
۳	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف)تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم. ب)گرافی را هم برند می‌نامیم که بین هر دو راس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد. پ)اگر **G** یک گراف **n** رأسی باشد مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابربا $\left(n(n-1)، \frac{n(n-1)}{2}\right)$ است ت)گراف C_nتنها یک (دور، مسیری) است **n**رأسی دارد	۱
۴	اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۵a + ۲۰۴a + ۳)$ را به دست آورید.	۱,۵

kermanclass.com

بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

دبیرستان علامه حلی۴

آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

شماره :«شماره»

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون : ۸:۰۰

زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته :ریاضی پایه:دوازدهم کلاس:«کلاس» تعداد

۵	اگر باقی مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱,۵
۶	ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ $(k\in W)$ نوشته می‌شود.	۱,۲۵
۷	فرض کنید **a** عدد طبیعی باشد،حاصل $[21a^2, 35a^3]$را بدست آورید.	۱
۸	اگر دو عدد $(5-3a)$ و$(7-4a)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(6+9a)$ را به دست آورید.	۱,۵

kermanclass.com

بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

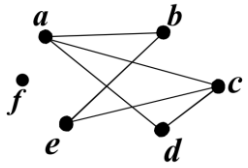
دبیرستان علامه حلی۴

آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

شماره :«شماره»

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون : ۸:۰۰

زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته :ریاضی پایه:دوازدهم کلاس:«کلاس» تعداد

۹	**اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد .دراین صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید۱۲ بهمن ، در همان سال چه روزی از هفته است؟**	۱,۲۵
۱۰	**معادله** هم نهشتی۲ $5x \overset{11}{\equiv} 2$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱,۵
۱۱	**جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی** $9x + 13y = 7$ **رابدست آورید.**	۱,۵
۱۲	**گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید.** **الف)** $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگترین درجه در گراف $\overline{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟ پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت)آیا گراف G همبند است؟ 	۲

kermanclass.com

بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

دبیرستان علامه حلی۴

آزمون نیم سال اول تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

شماره :«شماره»

نام و نام خانوادگی: «نام» «نام_خانوادگی» نام درس: گسسته نام دبیر: آقای کریمی تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶ ساعت آزمون : ۸:۰۰

زمان آزمون: ۹۰ دقیقه رشته :ریاضی پایه:دوازدهم کلاس:«کلاس» تعداد

۱۳	گراف G، ۳- منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد راس های گراف است مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید	۱
۱۴	در گراف G درجه راس V برابر با ۹ است و درجه راس V در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۱
۱۵	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است ابتدا p را به دست آورید سپس گراف را رسم می‌کنید	۱

kermanclass.com

۲ پاسخ تشریحی ۲

۱ ابتدا هر دو طرف را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم :

$$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$

حالا جملات $2x^2$ ، $2y^2$ ، $2z^2$ را به شکل x^2+x^2 و ... می‌نویسیم ؛ و عبارات سمت راست را به چپ می‌آوریم :

$$x^2+y^2-2xy+x^2+z^2-2xz+y^2+z^2-2yz \geq 0$$

حالا می‌بینیم اتحاد مربع کامل داریم .

$$\underbrace{(x-y)^2}\quad \underbrace{(x-z)^2}\quad \underbrace{(y-z)^2}$$

جمع سه عبارت نامنفی ، همواره بزرگتر یا مساوی صفر است . یعنی به یک عبارت بدیهی درست رسیدیم .

■ راه حل :

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \overset{\times 2}{\iff} 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$
$$\iff x^2+y^2-2xy+x^2+z^2-2xz+y^2+z^2-2yz \geq 0 \iff (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$$

عبارت بدیهی

---

۲ فرض کنید $\alpha-\beta$ گنگ نباشد ؛ پس گویاست (فرض خلف) . از طرفی می‌دانیم مجموع دو عدد گویا ، عددی گویا است . پس جمع $\alpha-\beta$ و $\alpha+\beta$ باید گویا باشد . یعنی $2\alpha \in \mathbb{Q}$. که این یک تناقض است چون α گنگ بود . پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود

---

۳ الف) مرتبه ب) مسیر پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ ت) دور

* تعداد یال‌های یک گراف را « اندازه » می‌نامیم .

★ گراف P_n یک مسیر n رأسی با $n-1$ یال دارد .

kermanclass.com
Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۴) ب.م.م دو عبارت را d در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{matrix} d \mid 4a+3 & \xrightarrow{\times 5} & d \mid 20a+15 \\ d \mid 5a+2 & \xrightarrow{\times 4} & d \mid 20a+8 \end{matrix} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 20a+15-20a-8 \Rightarrow d \mid 7$$

چون ب.م.م همواره مثبت است، پس ما $d=1$ و $d=7$ را داریم. اما باید بررسی کنیم که آیا $d=7$ امکان‌پذیر هست یا نه؟

$$\begin{matrix} 7 \mid 4a+3 & \xrightarrow{\times 7} & 7 \mid 28a+21 \\ 7 \mid 7a & \text{بدیهی} & \xrightarrow{\times 4} 7 \mid 28a \end{matrix} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 7 \mid 21 \checkmark$$

$$\begin{matrix} 7 \mid 5a+2 & \xrightarrow{\times 7} & 7 \mid 35a+14 \\ 7 \mid 7a & \text{بدیهی} & \xrightarrow{\times 5} 7 \mid 35a \end{matrix} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 7 \mid 14 \checkmark$$

پس شدنی است. جواب $d=7$ است.

---

۵) طبق داده‌های سؤال:

$$\begin{matrix} m \overset{13}{\equiv} 2 & \xrightarrow{\times 3} & 3m \overset{13}{\equiv} 6 \\ n \overset{13}{\equiv} 9 & \xrightarrow{\times 5} & 5n \overset{13}{\equiv} 45 \overset{13}{\equiv} 6 \end{matrix} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5n-3m \overset{13}{\equiv} 6-6 \overset{13}{\equiv} 0$$

پس باقی‌مانده برابر صفر است.

★ می‌توانیم دو طرف یک هم‌نهشتی را در عدد ضرب کنیم.

★ می‌توانیم دو طرف دو هم‌نهشتی را از هم کم کنیم یا با هم جمع کنیم. به‌شرطی که پیمانه برابر باشد.

$$\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix} \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d \quad , \quad \begin{matrix} a-c \overset{m}{\equiv} b-d \\ c-a \overset{m}{\equiv} d-b \end{matrix}$$

kermanclass.com
Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۶ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها ، یک عدد صحیح از لحاظ باقی مانده بر ۴ ، حالات زیر را دارد . حالا بررسی می کنیم که در کدام حالات امکان اول بودن دارد.
به خاطر داریم که همگی اعداد اول بزرگ تر از ۳ ، فرد هستند.

$P=4K \Rightarrow 2|P, 3|P, 4|P$ تناقض ✗

$P=4K+1 \Rightarrow$ فرد ✓

$P=4K+2 \Rightarrow P=2(2K+1) \Rightarrow 2|P$ تناقض ✗

$P=4K+3 \Rightarrow P=3(2K+1) \Rightarrow 3|P$ تناقض ✗

$P=4K+4 \Rightarrow P=2(2K+2) \Rightarrow 2|P$ تناقض ✗

$P=4K+5 \Rightarrow$ فرد ✓

در واقع ما به دنبال حالاتی هستیم که **اولاً** P فرد باشد . و **ثانیاً** به عدد دیگری بخش پذیر نباشد.
از آنجایی که کل اعداد صحیح دنیا در یکی از دسته ی بالا هستند ، و تعدادی از آنها مردود شدند و شرایط اول بودن را نداشتند ، پس اعداد اول حتماً در یکی از دو دسته $4K+1$ و $4K-1$ قرار می گیرند.
← ضمناً ترجمه بفرمایید که $4K+5$ همان $4K-1$ است.

---

۷ $[21a^2, 35a^3] = [3\times7\times a^2, 5\times7\times a^3] = 3\times5\times7\times a^3 = 105a^3$

★ برای محاسبه ک.م.م دو عدد ، ابتدا آنها را به عوامل اول تجزیه می کنیم. پس از بین پایه ی مشترک ، پایه با بیشترین توان را انتخاب می کنیم. پایه ی غیر مشترک را هم انتخاب می کنیم. و همه را در هم ضرب می کنیم. حاصل بدست آمده همان ک.م.م است.

---

۸ هرجا صحبت از **رحم یکان** شد ، با هم نوشتی به پیمانه **۱۰** سروکار داریم.

$3a-5 \overset{10}{\equiv} 4a-7 \xrightarrow{-3a} -5 \overset{10}{\equiv} a-7 \xrightarrow{+7} 2 \overset{10}{\equiv} a$

$9a+4 \overset{10}{\equiv} ?$

$a \overset{10}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 9} 9a \overset{10}{\equiv} 18 \overset{10}{\equiv} 8 \xrightarrow{+4} 9a+4 \overset{10}{\equiv} 12 \overset{10}{\equiv} 2$

پاسخ: ۴

kermanclass.com
Scanned with CamScanner

Subject:
Date

۹) در مسائل تقویم نگاری باید فاصله روزها را حساب کنیم و آن را به شکل هم نهشتی به پیمانه ۷ ببریم، زیرا هفته ۷ روز دارد. سپس عدد نهایی نشان دهنده تعداد روزی است که باید جلو برویم.

فاصله : $29 + (3 \times 35) + 12 \overset{7}{\equiv} 1 + 6 + 5 \overset{7}{\equiv} 5$

29: باقی مانده از مهر — (3×35): کل آبان و آذر و دی — 12: از بهمن

یعنی باید ۵ روز جلو برویم

طبق جدول: پاسخ ←

« پنج شنبه »

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

---

۱۰) $5x \overset{11}{\equiv} 2 \overset{11}{\equiv} 13 \overset{11}{\equiv} 24 \overset{11}{\equiv} 35 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35$

در بالا، کاری که کردیم این بود که مضارب پیمانه را به طرف راست اضافه کردیم تا به مطلوب برسیم. حالا می خواهیم دو طرف را بر ۵ تقسیم کنیم. ضمناً $(5, 11) = 1$.

$x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x = 11k + 7 \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$ ✓

★ اگر بخواهیم دو طرف هم نهشتی $ma \overset{p}{\equiv} mb$ را بر m تقسیم کنیم، باید به (m, p) دقت کنیم. اگر $(m, p) = 1$ باشد آنگاه $a \overset{p}{\equiv} b$ است. اما اگر $(m, p) = n$ مخالف ۱ باشد آنگاه $a \overset{\frac{p}{n}}{\equiv} b$

یعنی باید پیمانه را بر n تقسیم کنیم. لذا پیمانه جدید داریم.

---

۱۱) برای حل معادله سیاله خطی باید دو طرف تساوی را به هم نهشتی به پیمانه ضریب کوچکتر ببریم.

$9x + 13y = 7 \Rightarrow 9x + 13y \overset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow 4y \overset{9}{\equiv} 7 \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow[(4,9)=1]{\div 4} y \overset{9}{\equiv} 4$

$\Rightarrow y = 9k + 4$

حالا $y = 9k + 4$ را در معادله اصلی جایگذاری می کنیم:

$9x + 13(9k + 4) = 7 \Rightarrow x = -5 - 13k$

✓ جواب: $x = -5 - 13k \; , \; y = 9k + 4$

P4PCO

kermanclass.com

Scanned with CamScanner

Subject :
Date

۱۲) الف) $N_G(C) = \{a, d\}$

ب) رأس f ، ۵

پ) adceba

ت) خیر، زیرا بین رأس f و رئوس دیگر، هیچ مسیری وجود ندارد.

★ بزرگ‌ترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به رأسی است که در گراف G کوچک‌ترین درجه را دارد.

★ همسایگی باز رأس a یا همان $N_G(a)$ شامل رأس‌هایی است که a به آن‌ها وصل است.
همسایگی بسته رأس a یا همان $N_G[a]$ شامل همان رأس‌های مذکور + خود a است.

---

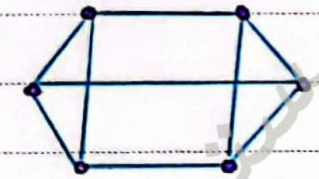
۱۳) مهم‌ترین نکته درباره یک گراف ۲-منتظم از مرتبه p این است که $2p = 2q$

پس $q = \frac{2p}{2}$.

$$q = 2p - 3 \rightarrow \frac{2p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow \frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$$

مرتبه گراف ۶ است.

یعنی یک گراف ۳ منتظم از مرتبه ۶.



---

۱۴) تعبیر سؤال این است که در گراف G، رأس v به ۹ رأس وصل است و به تعداد نامشخصی رأس دیگر از گراف وصل نیست. می دانیم در گراف $\bar{G}$، تمام یال‌هایی که در G نبودند، حضور دارند. پس اینکه رأس v در گراف $\bar{G}$ به ۱۲ رأس دیگر وصل است، نشان می‌دهد در فضای کل گراف، ۲۱ رأس دیگر بجز خود v وجود دارند. پس مرتبه گراف ۲۲ است. زیرا خود v هم باید حساب شود.

kermanclass.com
Scanned with CamScanner

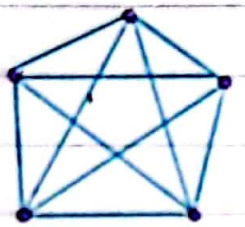
Subject :
Date

q = اندازه، تعداد یال
p = مرتبه ، تعداد رأس

۱۵) می دانیم در یک گراف کامل $q = \frac{p(p-1)}{2}$ است.

$$q = \frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p(p-1) = 20 \Rightarrow p = 5 \checkmark$$

گراف K_5 منظم است.



علی محمدزاده شبستری

kermanclass.com

Scanned with CamScanner