

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلٰی مُحَمَّدٍ وَّ اٰلِ مُحَمَّدٍ وَّ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ



# ریاضی

پایه نهم  
دوره اول متوسطه





## وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	ریاضی - پایه نهم دوره اول متوسطه - ۹۰۵
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، طیبه حمزه بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی) حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، خسرو داودی، کبری دلشاد، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی و میرشهرام صدر (اعضای گروه تألیف) - افسانه حجتی طباطبایی و سیداکبر میرجعفری (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی:	احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - مهدی کریم‌خانی (طراح گرافیک و طراح جلد) - مریم نصرتی (صفحه‌آرا) - سیاوش ذوالفقاریان، الهام محبوب (تصویرگر) - مریم دهقان‌زاده (رسام) - زهرا ایمانی نصر، سیف‌الله بیک محمددلیوند، علی نجمی، پیام حمیدی، سپیده ملک‌ایزدی و ناهید خیام‌باشی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: <a href="http://www.irtextbook.ir">www.irtextbook.ir</a> و <a href="http://www.chap.sch.ir">www.chap.sch.ir</a>
ناشر:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (درویش) تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹-۳۷۵۱۵
چاپخانه:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ:	چاپ دهم ۱۴۰۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



- انسان عصارهٔ همه موجودات عالم است.
- با تربیت صحیح ممکن نیست که یک مملکتی تحت تأثیر استعمار باشد.
- اگر ملتی بخواهد به طرف سعادت پرواز کند، باید با دو بال تهذیب نفس و علم باشد.

امام خمینی (قُدَسَ سِرُّهُ)

## فصل ۱ مجموعه‌ها ..... ۱

- درس اول: معرفی مجموعه ..... ۲
- درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها ..... ۶
- درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها ..... ۱۱
- درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال ..... ۱۵

## فصل ۲ عددهای حقیقی ..... ۱۸

- درس اول: عددهای گویا ..... ۱۹
- درس دوم: عددهای حقیقی ..... ۲۳
- درس سوم: قدر مطلق و محاسبه تقریبی ..... ۲۸

## فصل ۳ استدلال و اثبات در هندسه ..... ۳۲

- درس اول: استدلال ..... ۳۳
- درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه ..... ۳۷
- درس سوم: هم‌نهستی مثلث‌ها ..... ۴۴
- درس چهارم: حل مسئله در هندسه ..... ۴۹
- درس پنجم: شکل‌های متشابه ..... ۵۳

## فصل ۴ توان و ریشه ..... ۵۹

درس اول: توان صحیح ..... ۶۰

درس دوم: نماد علمی ..... ۶۵

درس سوم: ریشه‌گیری ..... ۶۸

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها ..... ۷۳

## فصل ۵ عبارات‌های جبری ..... ۷۸

درس اول: عبارات‌های جبری و مفهوم اتحاد ..... ۷۹

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها ..... ۸۶

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها ..... ۹۰

## فصل ۶ خط و معادله‌های خطی ..... ۹۵

درس اول: معادله خط ..... ۹۶

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ ..... ۱۰۲

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی ..... ۱۰۸

## فصل ۷ عبارت‌های گویا ..... ۱۱۳

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا ..... ۱۱۴

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا ..... ۱۱۹

درس سوم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها ..... ۱۲۶

## فصل ۸ حجم و مساحت ..... ۱۳۰

درس اول: حجم و مساحت کره ..... ۱۳۱

درس دوم: حجم هرم و مخروط ..... ۱۳۵

درس سوم: سطح و حجم ..... ۱۴۰

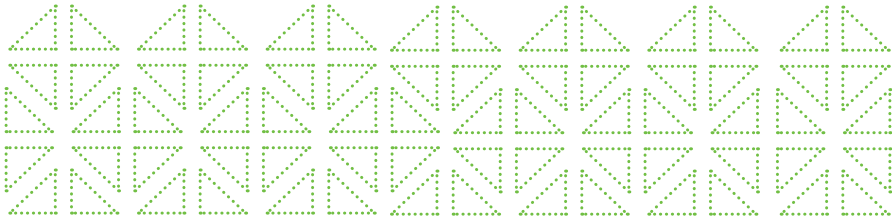
## سخنی با معلم

کتاب ریاضی پایه نهم بر مبنای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در رویکرد جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. اگرچه رسیدن به چنین هدفی با موانع، مشکلات و دشواری‌های فراوانی روبه‌روست و تحقق کامل آن به سرعت امکان‌پذیر نیست؛ ولی مدّ نظر قرار دادن چنین هدفی می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. اصلی‌ترین و مؤثرترین نقش در این جهت به عهده معلم است. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند که برای ادای وظیفه نسبت به آموزش معلمان، ضمن اطلاع‌رسانی به موقع درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی را به موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب از سه بخش فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. آنچه در انجام یک فعالیت به طور عمده مدّ نظر بوده است، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل ماند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه حل، مرتب کردن، قضاوت درباره یک راه حل و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلم انجام می‌پذیرد و هر جا که لازم باشد، راهنمایی توسط معلم ارائه خواهد شد. در بسیاری موارد انجام فعالیت ساده و آسان نیست و صدالبته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند. معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزانش آنها را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحاتی بیشتر و تغییراتی، فعالیت را ساده‌تر نماید.

هنگام انجام فعالیت، هدایت‌گفت‌وگویی کلاسی یا گفتمان ریاضی که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه<sup>۱</sup> (ایده)های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهده معلم است. به طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و



انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است. دربارهٔ ضرورت آموزش راهبردهای حل مسئله در بین پژوهشگران و آموزشگران تقریباً اتفاق نظر وجود دارد. با این حال دربارهٔ چگونگی این کار نظرات متفاوتی هست. در این کتاب آموزش راهبردها از متن درس جدا نشده است. ضمناً اصراری بر ذکر عناوین راهبردها جز موارد مشخص و آشنا نبوده است. بنابراین سعی شده است که از عبارات و واژه‌های نامأنوس اجتناب شود. با آنکه بخش جداگانه‌ای با عنوان حل مسئله در کتاب وجود ندارد؛ ولی در اکثر فعالیت‌ها دانش‌آموزان به نوعی درگیر فرایند حل مسئله می‌شوند. علاوه بر این، اساساً آموزش راهبردها معمولاً به زمانی طولانی نیاز دارد؛ زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده‌ها راهبرد جزئی‌تر باشد. ارائهٔ راه حل‌ها و روش‌های مختلف برای یک مسئله نیز به صورت هدفمند دنبال شده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان هنگام روبه‌رو شدن با یک مسئله - به ویژه وقتی که الگوریتمی مشخص برای حل آن فرانگرفته باشند - به روش‌های متفاوتی عمل می‌کنند.

پس از آماده شدن نسخهٔ اولیهٔ کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح کتاب برگزار کردند و برخی تغییرات و اصلاحات را در کتاب اعمال نمودند. علاوه بر این نظرات اعتباربخشی و نیز نظرات دبیران سراسر کشور نیز مدنظر قرار گرفت. لازم است مراتب تقدیر و تشکر خود را از تمام همکارانی که نسخهٔ اولیهٔ کتاب را مطالعه کرده‌اند و نظرات و بررسی‌ها و پیشنهادهای خود را به واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی ارسال کرده‌اند، اعلام کنیم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نویدبخش حضور و مشارکت مؤثرتر دبیران ریاضی در تألیف کتاب‌های درسی است. گفتنی است مشاورانی علمی از مراکز آموزشی و پژوهشی و دانشگاه‌ها نیز بخش‌هایی محدود از کتاب را مطالعه و مورد نقد قرار دادند که جا دارد از آنها قدردانی شود. واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد<sup>۱</sup> دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال، تنها با تلاش، اراده و همت معلمان عزیز می‌توان به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار بود.

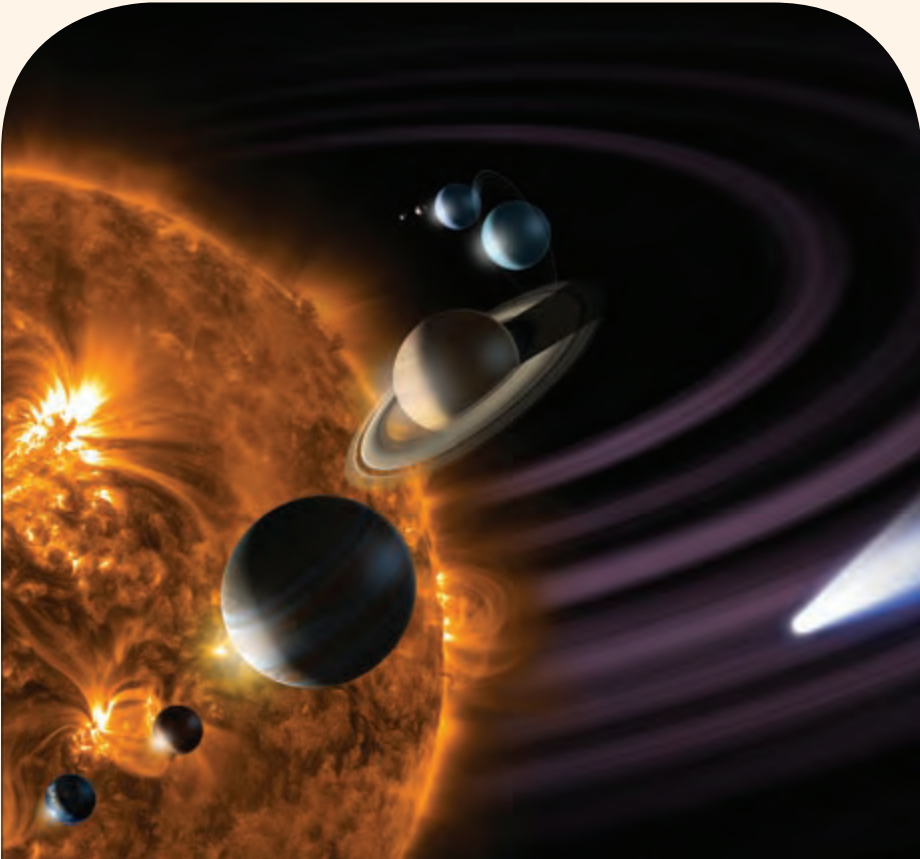




# مجموعه ها



وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ .....  
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...  
(سوره انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند. البته ستاره هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید هم وجود دارند که اگر این ستاره ها به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشانند.

## فعالیت

در شکل روبه‌رو شماره‌های طبیعی عدد  $6^0$  را نوشته‌ایم و بین آنها شماره‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شماره‌های  $6^0$  را که اول نیستند، در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شماره‌های طبیعی و اول عدد  $6^0$  یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حروفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم  $A = \{2, 3, 5\}$ ؛ در این صورت یک **مجموعه** تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک **عضو** مجموعه A می‌گوییم؛ پس مجموعه A دارای ۳ عضو است.

\* شما شماره‌های مرکب عدد  $6^0$  را به صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

\* مجموعه شامل شماره‌های عدد  $6^0$  که نه اول باشند، و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

\* مجموعه D شامل همه شماره‌های دورقمی  $6^0$  را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل ۳ شماره‌ی زوج عدد  $6^0$  را تشکیل دهند. احمد نوشت:  $\{4, 6, 10\}$  و رضا نوشت:  $\{6, 10, 12\}$  به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ نتیجه: در ریاضیات عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص‌کننده یک مجموعه معین و یکتا نباشد، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به جای  $\{3, 3, 4\}$  می‌نویسیم  $\{3, 4\}$ .

## معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای **مشخص** (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و **متمايز** (غیر تکراری) استفاده می‌کنیم.

## فعالیت

۱- کدام یک از عبارتهای زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.  
الف) عددهای طبیعی و یک رقمی (ب) چهار شاعر ایرانی (ج) دو عدد اول کوچکتر از ۱۲

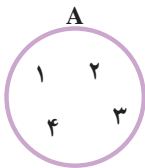
۲- با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به جای  $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$  باید بنویسیم  $A = \{ \_, \_, \_, \_ \}$

ب) به دلیل تکراری بودن عدد  $B = \{5, 6, 5, 7\}$  در  $B$  آن را به صورت \_\_\_\_\_

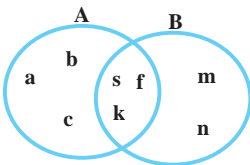
می نویسیم.

اگر مجموعه  $A$  را به صورت  $A = \{a, b, 5, 7\}$  در نظر بگیریم، برای نشان دادن اینکه  $a$  عضوی از مجموعه  $A$  است، می نویسیم  $a \in A$  و می خوانیم « $a$  عضو  $A$  است» و چون عدد ۴ عضو  $A$  نیست، می نویسیم  $4 \notin A$  و می خوانیم «۴ عضو  $A$  نیست».



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال، نمایش مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  با استفاده از نمودار ون به صورت مقابل است.

## فعالیت



۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه  $A$  و  $B$  رسم شده است، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با عضوهایشان مشخص کنید.

۲- دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8\}$  را در نظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به  $A$  و

هم در منحنی بسته  $B$  وجود دارد؟

۳- مجموعه عددهای دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را  $E$  بنامید. این مجموعه چند

عضو دارد؟

«اگر در مجموعه‌ای عضو وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعه  $\{0\}$  یا  $\{0\}$  که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

- ۴- کدام یک از عبارات‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟  
 الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶      ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱  
 ج) عددهای اول و زوج      د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشد.

## کار در کلاس

۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد؛ سپس عبارات‌های خود را با نوشته‌های هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص‌کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد.

۳- عبارتهایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، با علامت  $\checkmark$  و بقیه را با علامت  $\times$  مشخص کنید (با ذکر دلیل).

- الف) چهار عدد فرد متوالی      ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲  
 ج) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰      د) سه شهر ایران      ه) شماره‌های عدد ۲۴  
 و) ۵ عدد بزرگ      ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳  
 ۴- مانند نمونه کامل کنید:

$A = \{ \dots, پ, ب, الف \}$       مجموعه حروف الفبای فارسی

$B = \{ ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \}$      

$C$ : مجموعه حروف  $a$  و  $b$  و عدد ۳      مجموعه عددهای صحیح بین ۲- و ۳-

$D = \{ ۵ \}$       مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۴

$E = \{ \}$       مجموعه عددهای اول یک رقمی

$F = \{ ۲, ۴, ۶, ۸ \}$       مجموعه مضرب‌های اول عدد ۵

$G$ : مجموعه عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰       $\{ ۳, a, b \}$

$H = \{ ۲, ۳, ۵, ۷ \}$        $\{ ۶, ۴, ۲, ۸ \}$

۵- کدام یک از عبارات‌های زیر مشخص‌کننده یک مجموعه است؟ با نمودار و نشان دهید :

الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از  $10$

ب) شمارنده‌های اول عدد  $19$

ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی را مشخص می‌کند.

د) جواب‌های معادله  $2x+8=1$

هـ) چهار میوه خوشمزه

و) عددهای صحیح منفی و بزرگ‌تر از  $-8$

## تمرین

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد

عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف)  $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$

ب)  $C = \{10\}$

ج) عددهای طبیعی مضرب  $5$  و کوچک‌تر از  $100$

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از  $4$  و کوچک‌تر از  $5$

هـ) عددهای صحیح منفی که بین  $4$  و  $7$  قرار دارد.

و) عددهای اول دورقمی که مضرب  $7$  باشد.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت « $5$  عدد طبیعی که بین  $1$  و  $20$  قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص \_\_\_\_\_.

ب) مجموعه  $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$  دارای \_\_\_\_\_ عضو است.

ج) مجموعه  $\{0, \emptyset\}$  دارای \_\_\_\_\_ عضو است.

د) با توجه به مجموعه  $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ ؛ داریم:  $5$  عضو  $A$  است یا با نماد ریاضی، \_\_\_\_\_

و  $12$  عضو  $A$  نیست یا با نماد ریاضی، \_\_\_\_\_.

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد  $2$  عضو آنها باشد.

دو مجموعه برابر

فعالیت

۱۰		۱۲
-۴		-۲

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان‌اند و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه A و B برابراند و می‌نویسیم  $A = B$ .

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

(الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰

(ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱

(ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.

همان‌طور که دیدید، مجموعه  $\{۸, ۹, ۱۰\}$  با مجموعه  $\{۷, ۸, ۹\}$  برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم  $A \neq B$ .

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

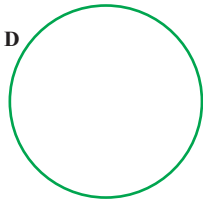
$$\left\{ ۵, \dots, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳} \right\} = \left\{ \frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۴۴}}{(-۲)^۲}, \dots, \sqrt{۲۵} \right\} \quad \text{الف)}$$

$$\left\{ 7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, \dots, 0/625 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -0/5, \frac{5}{8}, \dots, -2 \right\} \text{ (ب)}$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

زیر مجموعه

## فعالیت



مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید:

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش پذیر است، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا  $D = C$ ؟

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B **زیر مجموعه** D است و می‌نویسیم  $B \subseteq D$ .

آیا مجموعه C زیر مجموعه D است؟

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم:  $A \subseteq A$ .

اکنون زیر مجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این

مجموعه چیست؟

آیا عبارت  $\{1, 4, -6, 2\} \subseteq D$  درست است؟ چرا؟

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیر مجموعه A نیست و می‌نویسیم  $B \not\subseteq A$ .

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟

مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی:  $\emptyset \subseteq A$ .

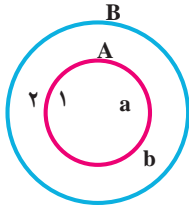
مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف)  $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعه سمت چپ،  $d$  هست که در مجموعه سمت راست

نیست.

ب)  $\{-1, 2, 0, 1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 0\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه

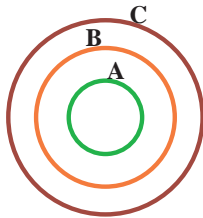
سمت راست است.



$$A \subseteq B, B \not\subseteq A$$

ج) با توجه به شکل مقابل  $A \subseteq B$  درست است؛ زیرا همه عضوهای  $A$  در  $B$  قرار دارند و  $B \not\subseteq A$  درست است؛ زیرا عضوی در  $B$  مانند  $2$  می‌توان یافت که در  $A$  وجود ندارد.

## کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر

را مشخص کنید :

$$C \not\subseteq A, B \subseteq A, A \not\subseteq C$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, \emptyset \subseteq A$$

۲- مجموعه‌های  $A, B, C$  را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را

مشخص کنید (با ذکر دلیل) :

$$A = \{1, 3, 6, 4\}, B = \{5, 1, 3\}, C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$$

$$B \not\subseteq A, 3 \subseteq B, A \subseteq B, B \subseteq C, A \not\subseteq C, 2 \in A$$

$$\{1, 4\} \in A, 6 \notin A, \{5, 6\} \subseteq C, 5 \in C, \emptyset \subseteq A$$

۳- همه زیرمجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  در زیر نوشته شده است :

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. ب)  $\{a, b, c, d\}$

## نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.



مجموعه عددهای طبیعی را با  $\mathbb{N}$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون نمایش مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار ون آموخته‌اید. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال: مجموعه عددهای طبیعی زوج  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت  $2k$  قابل نمایش است که در آن  $k \in \mathbb{N}$ ، پس می‌نویسیم:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم  $E$  برابر است با مجموعه عددهایی به شکل  $2k$  به طوری که  $k$  متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه  $E$  علامت « $\mid$ » خوانده می‌شود: «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم:

الف) مجموعه عددهای طبیعی فرد:  $O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب)  $A = \{7, 8, 9, 10\}$  یا  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\}$  یا  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 11\}$

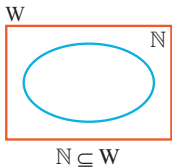
ج) زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{N}$  که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش پذیر است:  $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه  $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$  را با عضوهایش مشخص کنید:

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای  $n$  یک عدد طبیعی در  $5n + 3$  قرار دهید.

$n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n + 3$	$\frac{5(1)+3}{8}$	$\frac{5(2)+3}{13}$	$\frac{5(3)+3}{18}$	$\frac{5(4)+3}{23}$				...

بنابراین داریم:  $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$



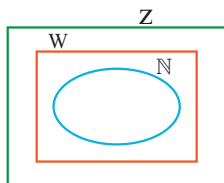
مجموعه عددهای حسابی را با  $W$  نمایش می‌دهند:  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

$$W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی  $\mathbb{N} \subseteq W$



مجموعه عددهای صحیح را با  $\mathbb{Z}$  نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو  $\mathbb{Z}$  هم هستند؛ پس:  $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

## کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضاها مشخص کنید :

الف) مجموعه عددهای صحیح فرد (ب)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$

ج)  $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

مجموعه عددهای گویا را با  $Q$  نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با اعضاها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم:  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح  $a$  داریم:  $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه  $\mathbb{Z} \subseteq Q$ .

## تمرین

۱- مجموعه  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

برابر است؟

$B = \{x \mid x \in A, x^2 \leq 2\}$  ,  $C = \{x \mid x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$  ,  $D = \{x \mid x \in A, x^2 = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند  $A$ ,  $B$  و  $C$  بنویسید؛ به طوری که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ . آیا می‌توان نتیجه

گرفت  $A \subseteq C$ ؟

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 3\}$  (ب)  $B = \{2x \mid x = 0, 2, 3\}$

۴- نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های  $Q, W, \mathbb{N}$  و  $\mathbb{Z}$

را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت  $\subseteq$  باهم

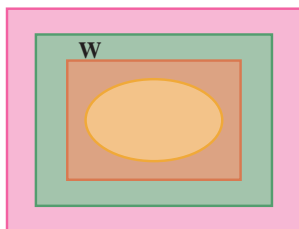
مقایسه کنید.

۵- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید :

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. (ب) هر عدد حسابی عددی گویاست.

ج) هر عدد صحیح عددی گویاست. (د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح‌اند.



## فعالیت

۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با  $V$  و فوتبال را با  $F$  نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش دهید و سپس با عضوهایشان بنویسید.

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

۲- دو مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید و

مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف)  $A = \{ \quad \}$  ب)  $B = \{ \quad \}$

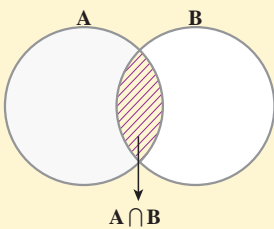
ج)  $\{ \quad \} =$  مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  هست

(این مجموعه را اشتراک  $A$  و  $B$  می‌نامیم و با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم).

د)  $\{ \quad \} =$  مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  هست

(این مجموعه را اجتماع  $A$  و  $B$  می‌نامیم و با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم).

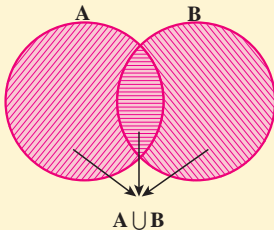
**اشتراک دو مجموعه:** اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، مجموعه‌ای شامل



همه عضوهای است که هم عضو مجموعه  $A$  و هم عضو مجموعه  $B$  است. این مجموعه را با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

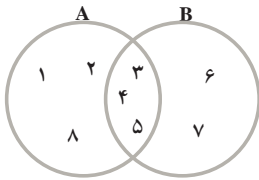
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

**اجتماع دو مجموعه:** اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ،



مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشد. این مجموعه را با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



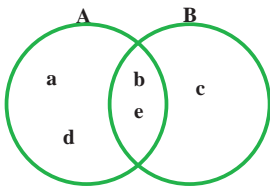
مثال: با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس  $A \cap B$  و  $A \cup B$  را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\} \text{ , } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

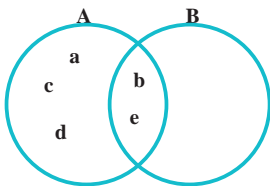
## فعالیت

۱- دو مجموعه  $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$  و  $A \cap B = \{b, e\}$  را در نظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار ون نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:

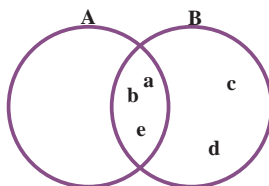


پاسخ حمیده

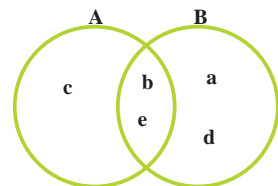
الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



پاسخ ریحانه



پاسخ زهرا



پاسخ حنا

ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد  $V - F$  نمایش می‌دهیم:

$$V - F = \{ \quad \quad \quad \} \quad F - V = \{ \quad \quad \quad \}$$

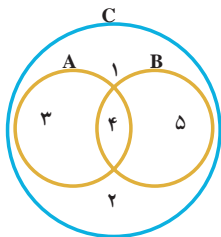
**تفاضل دو مجموعه:** مجموعه  $A - B$  (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعه  $A$  هستند؛ ولی عضو مجموعه  $B$  نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  هاشور خورده است:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر  $A = \{a, b, c, d, e, k\}$  و  $B = \{c, d, k, f, s, t\}$  در این صورت:  
 $A - B = \{a, b, e\}$  و  $B - A = \{f, s, t\}$

## کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟

- الف)  $A \subseteq C$       ب)  $B \subseteq C$       ج)  $C \subseteq (A \cup B)$   
 د)  $(A \cup B) \subseteq C$       ه)  $2 \in (A \cup B)$  و  $4 \notin (A \cap B)$   
 ز)  $A \cup B = A$       ح)  $4 \in (A \cup B)$       ط)  $5 \in (A \cup B)$

۲- مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را  $A$  و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را  $B$  بنامید. ابتدا  $A$  و  $B$  را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارندهٔ ۱۸ باشد؛ ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد.  
 ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشد.  
 ۳- مجموعه‌های  $(\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ ،  $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$  و  $(\mathbb{W} - \mathbb{N})$  را تشکیل دهید.

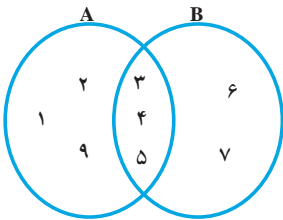
**قرار داد:** تعداد عضوهای هر مجموعه مانند  $A$  را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، اگر  $A$  مجموعه‌ای  $k$  عضوی باشد، می‌نویسیم  $n(A) = k$ .

مثلاً اگر  $A = \{2, 4, 6, 7\}$  در این صورت  $n(A) = 4$ .

۱- مجموعه‌های  $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$  و  $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$  و  $C = \{1, 7, 10, 11\}$  را در نظر بگیرید؛ سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

- الف)  $A \cup B$       ب)  $B \cup C$       ج)  $A \cup C$       د)  $A \cap B$   
 هـ)  $A - B$       و)  $C - B$       ز)  $(A - C) \cup (B - C)$       ح)  $(A \cup B) - C$   
 ط)  $A \cap A$       ی)  $A \cap \emptyset$       ک)  $B \cup B$       ل)  $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارتهای درست را با  $\checkmark$  و گزاره‌های نادرست را با  $\times$  مشخص کنید :



- الف)  $B - A = \{6, 7\}$       ب)  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$   
 ج)  $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$   
 د)  $n(A \cup B) = 8$   
 هـ)  $A - B = B - A$  (و)  $n(A - B) = n(B - A)$

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

- ۱) B      ۲) A      ۳) اجتماع  
 ۴) زیرمجموعه      ۵)  $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعه، همان دو مجموعه است.

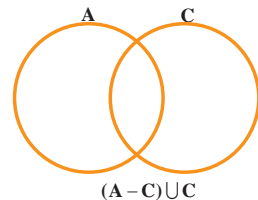
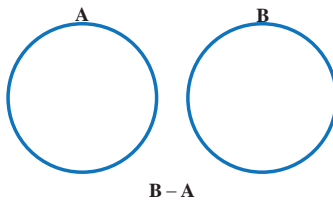
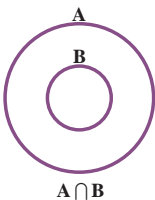
ب) هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه است.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B هر یک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه  $A - B$  زیرمجموعه مجموعه است.

هـ) اجتماع دو مجموعه  $(B - A)$  و  $(A \cap B)$  با مجموعه مساوی است.

۴- در هر یک از شکل‌های زیر مجموعه موردنظر را هاشور بزنید.



در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن را  $S$ ، مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های مطلوب را  $A$  و احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  را با نماد  $P(A)$  نشان دهیم، دستور بالا به صورت  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  نوشته می‌شود.

## یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید:



(الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

(ب) عدد رو شده اول باشد.

(ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

(د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل: (الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را  $A$  می‌نامیم؛ در این صورت داریم:

$$A = \{۳, ۶\}, S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}; n(A) = ۲, n(S) = ۶$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

(ب)  $B = \{۲, ۳, ۵\}; n(B) = ۳$ ; پیشامد رو شدن عدد اول  $B$ :

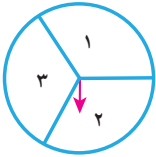
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

(ج)  $C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = ۰$ ; پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶  $C$ :

$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{۰}{۶} = ۰$$

(د)  $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} = S$ ; پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷  $D$ :

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{۶}{۶} = ۱$$



با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه  $S$  بنامید.  $S$  را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$$A = \{3, 1\} \text{ (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)}$$

$$B = \{1, 2\} \text{ _____}$$

$$C = \{2, 3\} \text{ _____} \quad D = \{2\} \text{ _____}$$

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های  $S$  را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها **هم‌شانس‌اند**؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های  $S$  را تشکیل دهید.

## کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$  است. پیشامد  $A$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ  $A$  را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد،  $\frac{4}{10}$  باشد.

ج) اگر  $B$  پیشامد خارج شدن عدد اول و  $C$  پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های  $B$  و  $C$  را تشکیل دهید و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای  $B$  و  $C$  هم‌شانس‌اند؟ چرا؟



- ۱- اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :  
 (الف) عدد رو شده زوج باشد. (ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ تر باشد.  
 (ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. (د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد.
- ۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید  
 (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟
- ۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :  
 (الف) این مهره آبی باشد. (ب) این مهره سبز نباشد.  
 (ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.
- ۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :  
 (اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم،  $n(s) = 36$ )  
 (الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. (ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.  
 (ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.

## حواله‌ها

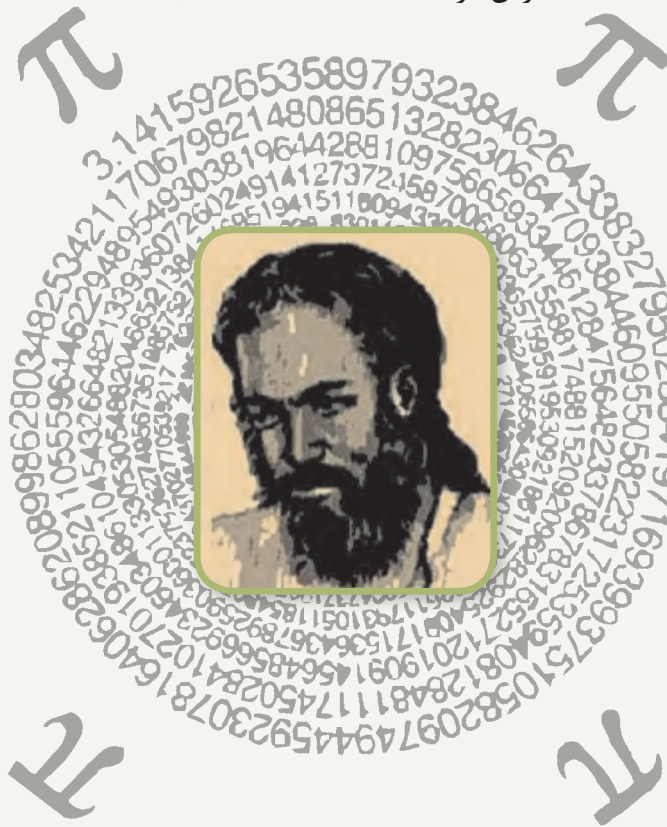
در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟  
 در واقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم: در همه شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزء نخستین تعریف نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.



# عددهای حقیقی



«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»  
 «... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد  
 شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین  
 مفاخر تاریخ ایران به شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط  
 چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد  $\pi$  که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار  
 محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در  
 ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:  
 «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N}   x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی	$\{x \in \mathbb{W}   x \leq 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z}   \dots\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱	$\{ \dots \}$	

نامساوی  $x \geq 3$  برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟

۱, ۲, ۳, ۴, ۵

در مورد محدودیت‌ها و مزایا و معایب هر کدام از روش‌های نمایش مجموعه در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲- می‌خواهیم بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

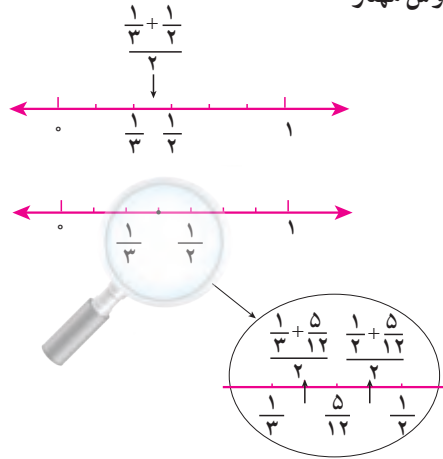
$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18}, \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

روش مریم

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان به هر تعداد، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid \right\}$$

## کار در کلاس

۱- بین  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{4}$  سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

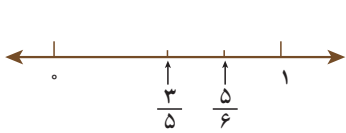
۲- بین  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$  دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

## فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{5}{9}$  را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند، با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد  $36^\circ$  چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید:

$$\frac{5}{9} = \frac{\quad}{36^\circ} \quad \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.\underline{\quad}\underline{\quad} \quad \frac{7}{8} = \underline{\quad} \quad \frac{5}{6} = \underline{\quad} \quad \frac{3}{5} = \underline{\quad}$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲- با استفاده از تقسیم، نمایش اعشاری کسرهای زیر را بنویسید:

$$\frac{3}{8} = \underline{\quad} \quad \frac{1}{3} = \underline{\quad} \quad \frac{7}{6} = \underline{\quad}$$

الف) بین نمایش اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟

$$1 \div 3 = 0.33333$$

در نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به‌طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{5}$  متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.\underline{3}\underline{3}\underline{3}\dots = 0.\underline{3} \quad \frac{7}{6} = 1.\underline{1}\underline{6}\underline{6}\underline{6}\dots = 1.\underline{1}\underline{6}$$

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید :

$$\frac{5}{11} =$$

$$\frac{7}{9} =$$

$$\frac{5}{6} =$$

$$\frac{7}{22} =$$

$$\frac{3}{20} =$$

$$\frac{5}{16} =$$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارند که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

### تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و تا حد امکان ساده کنید :

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \div 5\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}}}$$

۲- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف)  $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

ب)  $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

۳- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف)  $\frac{1}{11}, \frac{12}{13}$

ب)  $0, -\frac{1}{3}$







مثال:  $\sqrt{7}$  بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

## کار در کلاس

۱- بین  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

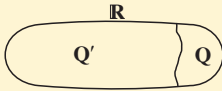
۳- الف) مجموعه  $A$  به صورت  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید. آیا نمایش  $A$  به

صورت زیر درست است؟



ب) نقطه نمایش  $\sqrt{5}$  را روی محور مشخص کنید.

عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ



دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای

اصم را مجموعه **عددهای حقیقی** می‌نامیم و آن را با  $\mathbb{R}$  نمایش

می‌دهیم. داریم:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0.75 \in \mathbb{R}$$

$$0.2022022202222\dots \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

## کار در کلاس

۱- داخل  $\bigcirc$  علامت  $\in$  یا  $\notin$  بگذارید:

$$4 \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$0.2 \bigcirc \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \bigcirc \mathbb{R}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \bigcirc \mathbb{R}$$

$$-5 \bigcirc \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \bigcirc \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25} \bigcirc \mathbb{Q}'$$

$$\frac{0}{6} \bigcirc \mathbb{R}$$

$$\sqrt{3/5} \bigcirc \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/9} \bigcirc \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/9} \bigcirc \mathbb{Q}$$

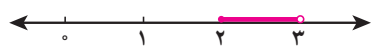
$$\frac{9}{-1} \bigcirc \mathbb{Z}$$

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



### فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:



با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
- $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$

### کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:

- (الف)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
- (ب)  $B = \{ \quad \quad \quad \}$
- (ج)  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

- $\frac{75}{10} \in A$
- $0.252552555... \in B$
- $\sqrt{13} \in A$
- $\sqrt{7} \in C$
- $\sqrt{1} \in A$
- $-1000 \in C$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟

- (الف)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
- (ب)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
- (ج)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	$\circ$	$\pi$	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229\dots$	$-1^\circ$	$\frac{6}{2}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
$\mathbb{W}$ حسابی								
$\mathbb{Z}$ صحیح								
$\mathbb{Q}$ گویا								
$\mathbb{Q}'$ گنگ								
$\mathbb{R}$ حقیقی								

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

ب)  $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  ,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} =$       ۲)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' =$       ۳)  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$       ۴)  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' =$

۴- عدد  $\sqrt{5} + 1$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

۵ و ۲- الف) ۶ و ۷      ب)  $\sqrt{3}, 6$       ج)  $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$       د)

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بزنید.

۱)  عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.


۲)  عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

۳)  عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.

۴)  عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷- در نمایش اعشاری عدد  $\sqrt{10}$  و عدد  $\frac{3}{11}$  چه تفاوتی هست؟

## فعالیت

- ۱- با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید:
- 
- نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟  
فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟  
فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟  
می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.
- ۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، **قدر مطلق a** می‌نامیم و با علامت  $|a|$  (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت:  $|-2| = |2| = 2$

- مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  تا مبدأ برابر  $\frac{2}{3}$  است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $(-\frac{2}{3})$  برابر  $\frac{2}{3}$  است؛ یعنی:  $|\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$
- مثال: قدر مطلق  $-\sqrt{5}$  را به صورت  $|\sqrt{5}|$  نشان می‌دهیم که مساوی  $\sqrt{5}$  است. قدر مطلق  $400$  را به صورت  $|400|$  نشان می‌دهیم که مساوی  $400$  است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- |   |  |
|---|--|
| ۱) $a > 0, b < 0$<br>۲) $a > 0, b > 0$<br>۳) $a \geq 0$<br>۴) $a < 0, b < 0$<br>۵) $a \leq 0$ | الف) دو عدد $a$ و $b$ مثبت است.<br>ب) عدد $a$ نامنفی است.<br>ج) دو عدد $a$ و $b$ منفی است.<br>د) عدد $a$ مثبت و عدد $b$ منفی است.<br>هـ) عدد $a$ نامثبت است. |
|---|--|

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- |   |   |
|---|---|
| الف) $a > 0, b > 0$<br>ب) $a < 0, b < 0$<br>ج) $a < 0, b > 0$ | ۱) $ab < 0$<br>۲) $ab > 0, a + b > 0$<br>۳) $ab > 0, a + b < 0$ |
|---|---|

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- |   |  |
|---|--|
| الف) $a \geq 0$<br>ب) $a > 0, b > 0$<br>ج) $a < 0$<br>د) $a < 0, b < 0$ | ۱) $ a  = -a$<br>۲) $ a  = a$<br>۳) $ a + b  = a + b$<br>۴) $ a + b  = -(a + b)$ |
|---|--|

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلق آنهاست.

۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی با آن است.

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6 \quad \sqrt{8} \approx 2/8$$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل :  $\sqrt{2} = 1/4$  پس  $1 - \sqrt{2}$  عددی منفی می‌شود :

۱)  $|2 - \sqrt{3}| =$  : دلیل :

۲)  $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| =$  : دلیل :

۳)  $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}|$  : دلیل :

۴)  $|-4 - \sqrt{3}| =$  : دلیل :

مثال : اگر  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = \sqrt{2}$  و  $c = -3$  باشد، حاصل عبارت  $|a+b+c|$  را به دست می‌آوریم :

$$|a+b+c| = |\frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3)| = |-2/5 + \sqrt{2}|$$

چون  $-2/5 + \sqrt{2}$  عددی منفی است ( $\sqrt{2} = 1/4$ )، پس حاصل عبارت مساوی با  $(-2/5 + \sqrt{2})$  یعنی  $2/5 - \sqrt{2}$  است.

مثال :  $|\underbrace{3 - \sqrt{5}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{-2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}}| = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

## فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می‌توانیم بنویسیم :  $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال : برای محاسبه  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$  خواهیم داشت :

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |\underbrace{1 - \sqrt{3}}_{\text{منفی}}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$





# استدلال و اثبات در هندسه



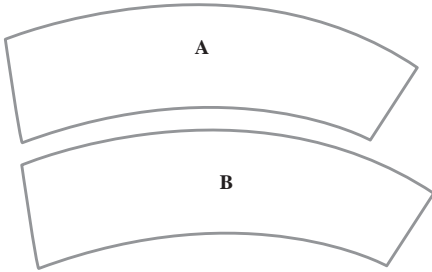
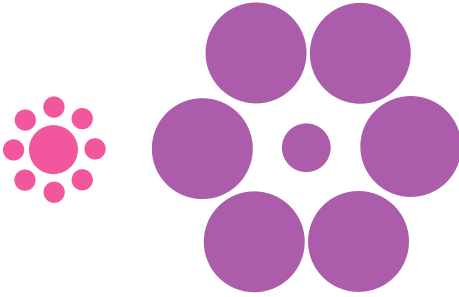
أَدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَ جَادِلْهُمْ بِأَتَى هِيَ أَحْسَنُ ...  
با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و  
مناظره کن! (سوره نحل، آیه ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و به نظر می‌رسد هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهشت» نیستند!



## فعالیت



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ تر است؟  
الف) با مشاهده تشخیص دهید.  
ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید.

۲- اگر قطعه های A و B قطعه هایی از شیرینی مورد علاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می کنید؟ (قطعه بزرگ تر کدام است؟)  
با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

۳- آیا مشاهده کردن یا به طور کلی استفاده از حس های پنج گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

هرچند به طور معمول در ریاضیات و به ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه حل ها و ارائه حدس های درست کمک زیادی می کند، اما به تشخیصی که بر اساس این روش ها حاصل می گردد، نمی توانیم به طور کامل اطمینان کنیم.

## کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می کند. در مورد نتایجی که از این مثال ها می گیرید، با یکدیگر بحث کنید.

## فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

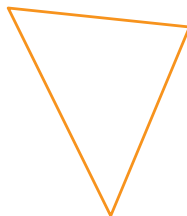
- ۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.» آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟
- ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.
- ۳- دلیلی را که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است، با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است؟

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد، **اثبات** می‌گوییم.

## کار در کلاس

- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.
- ۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :

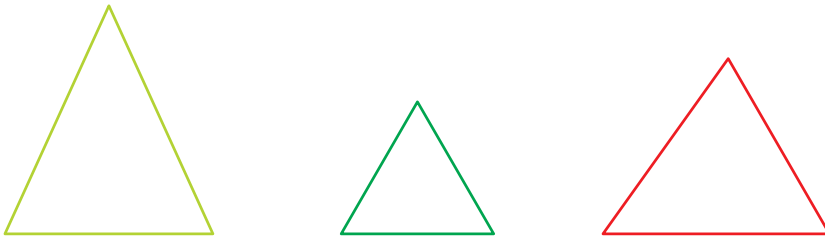


آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟  
یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

## تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری می‌خواست وزنه‌ای  $100$  کیلویی را بلند کند. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این حال نتوانست وزنه  $90$  کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ درباره استدلال‌ها بحث کنید.

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده‌ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال‌های زیر است؟

(الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند؛ پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

(ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

پس فیلم جنگی بوده است.

(ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه خاله کوچکم هم که به زودی به دنیا

می‌آید دختر خواهد بود.

(د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث

خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- حمید و وحید می‌دانستند که علی، حسن، حسین و باقر برادرند و : علی از حسین بزرگ‌تر

و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو

نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است؛ اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

حمید : در تمام خانواده‌هایی که دو فرزند به نام‌های علی و حسن داشته‌اند، علی فرزند بزرگ‌تر

بوده است.

وحید : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن

بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ درباره‌ی درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۵- معلم از دانش‌آموزان خواست با استدلال ریاضی ثابت کنند که در مثلث متساوی‌الساقین

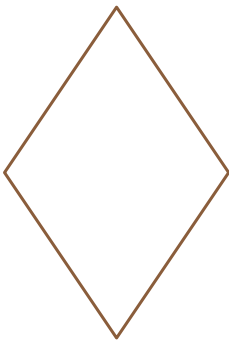
زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند. احمد زاویه‌ها را با نقاله اندازه‌گیری کرد و نتیجه گرفت که

زاویه‌ها مساوی هستند. چرا این روش برای اثبات کردن درست نیست؟ چرا اندازه‌گیری روش مناسبی

برای نتیجه‌گیری نیست؟

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

### فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید:

مهرداد: آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید: بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در

متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید:

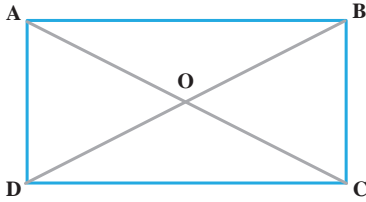
فرض: شکل لوزی است.

حکم: \_\_\_\_\_ برابر است.

استدلال:

$$\left. \begin{array}{l} \text{لوزی نوعی} \text{_____} \text{ است.} \\ \text{در متوازی‌الاضلاع} \text{_____} \text{ برابر است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{_____ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو}$$

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید:



فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.

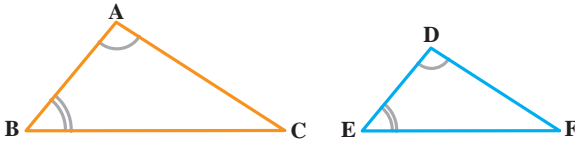
فرض و دانسته‌های قبلی :  $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \text{---} = \text{---} = \text{---} = 90^\circ \\ AD = \text{---} \quad , \quad AB = \text{---} \\ AB \parallel \text{---} \quad , \quad AD \parallel \text{---} \end{array} \right.$  حکم :  $AC = \text{---}$

## کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم

از دو مثلث نیز با هم برابر است.



\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

فرض :

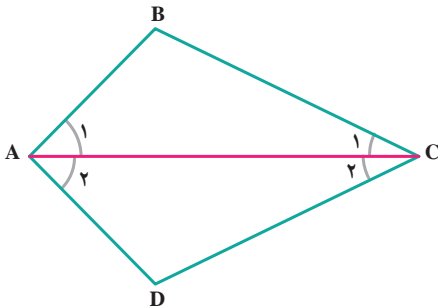
\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ : حکم

۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از،

ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر. (ابتدا شکل را رسم کرده و نام‌گذاری کنید).

۳- نشان دهید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن

برابر است.



۱- در مسئله زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

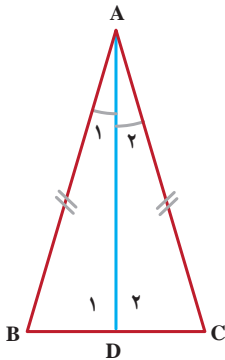
مسئله: در شکل مقابل پارخط AC نیمساز زاویه A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث ABC و  $\triangle ADC$  هم‌نهشت‌اند.

فرض:

حکم:

استدلال: چون AC نیمساز است، داریم  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زضز) هم‌نهشت‌اند.

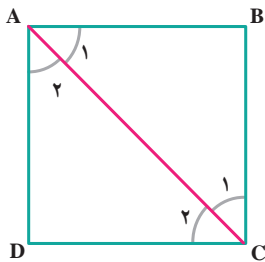
۲- مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعده آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ام که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \quad (\text{ساق‌های برابر}) \\ A_1 = A_2 \quad (\text{AD نیمساز است}) \\ AD = AD \quad (\text{ضلع مشترک}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$$

لذا نقطه D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟

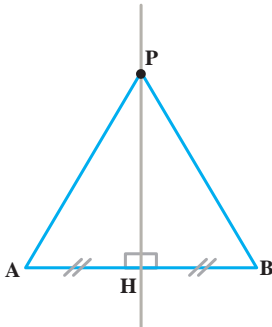


۳- با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

۴- به نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت مورد نظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.



۵- نقطه ای مانند P، روی عمود منصف پاره خط AB در نظر می گیریم و به دو سر پاره خط وصل می کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم نهشت اند، نتیجه می گیریم پاره خط های PA و PB با هم برابر است. بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمود منصف پاره خط AB است، از دو سر پاره خط AB یکسان اند.

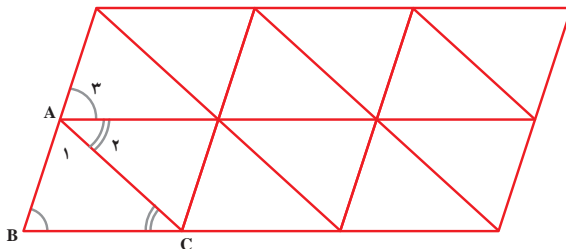
آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟

## کار در کلاس

به استدلال هایی دقت کنید که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده اند :  
مسئله : مجموع زاویه های داخلی مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه  $60^\circ$  است، مجموع زاویه های مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.



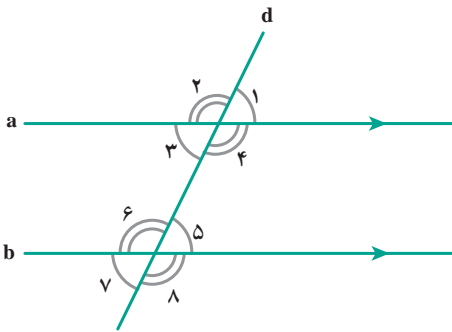
استدلال مهدی : مهدی شکل

روبرو را، که از مثلث های هم نهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه های مثلث ABC مانند شکل

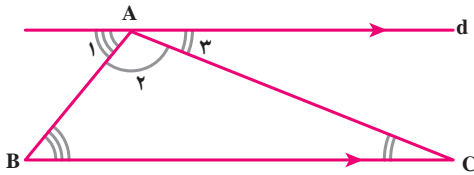


استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد :

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$



استدلال رضا : رضا گفت می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی اند».



حال مثلی دلخواه مانند  $\triangle ABC$  را در نظر می گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با شماره های ۱، ۲ و ۳ نشان داده ایم که

زاویه  $A_2$  همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم :  $\hat{B} = \hat{A}_1$  و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم :  $\hat{C} = \hat{A}_3$  پس با جای گذاری  $\hat{A}_1$  و  $\hat{A}_3$  به ترتیب به جای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  خواهیم داشت :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$

استدلال رضا را می توان با استفاده از نمادهای ریاضی مرتب و خلاصه کرد و بدین صورت نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

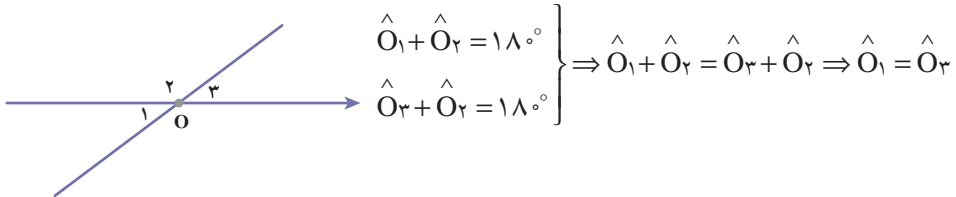
$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال های این دانش آموزان بحث کنید.

## فعالیت

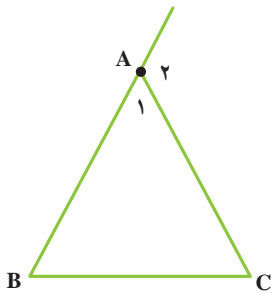
مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول های حمید و بهرام برابر  $5000$  تومان و مجموع پول های سعید و بهرام نیز برابر  $5000$  تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟  
 مسئله : نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابرند.  
 فرض کنیم  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_3$  مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :



### تمرین

۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



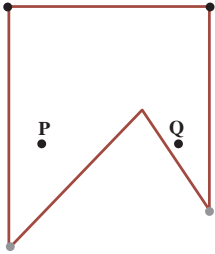
مسئله : در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

اثبات : مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.  
 می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است و زوایای  $\hat{A}_1$  و  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  هر کدام  $60^\circ$  است؛ بنابراین

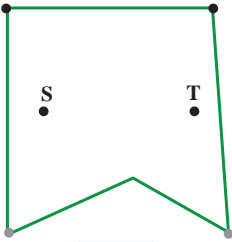
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \quad \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

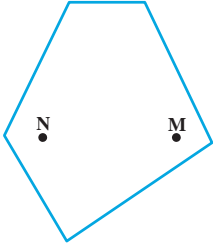
۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است؛ اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» هر ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های سه دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست؛ زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.



مهديه : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

۳- آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف)  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.} \end{array} \right.$  مستطیل ABCD است.

(ب)  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{array} \right.$  همه ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند.

(ج)  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.} \end{array} \right.$  ABCD مربع نیست.

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط

عمود می‌شود.

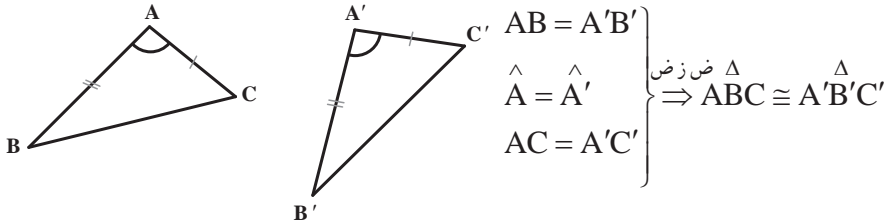
راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز

مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس دلیل آن را که این

نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است، بیان کنید.

## یادآوری

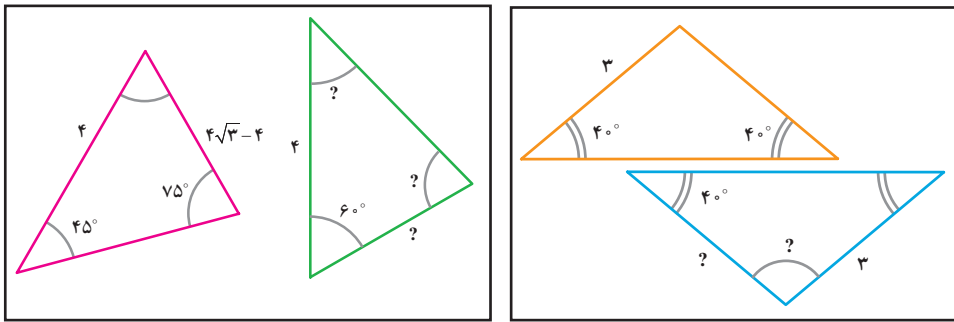
با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت هم‌نهشتی (ض ض ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم:



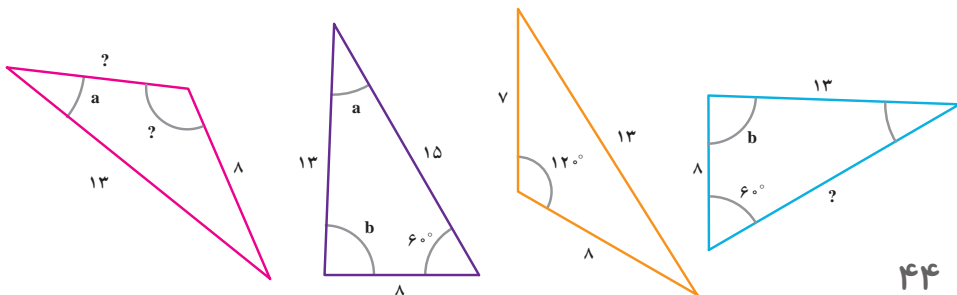
برای یادآوری، دو حالت دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم‌نهشتی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

## فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:

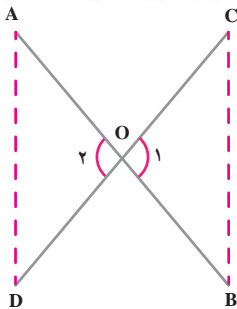


۲- در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



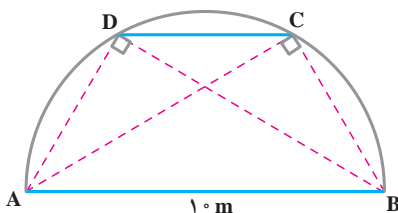
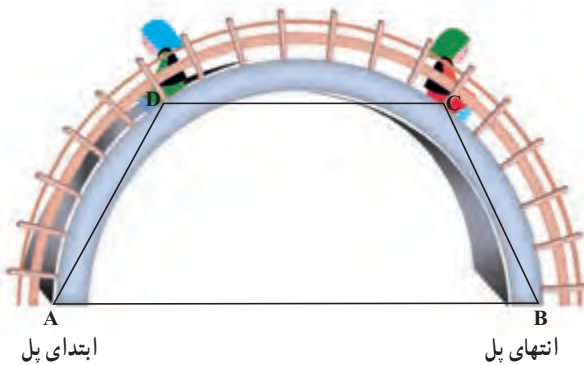


مثال : با رحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. در نمونه ای از آنها دو لایه چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته است. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است :  $OA=OB$  و  $OC=OD$  (چرا؟) و حکم این است :  $AD=BC$ . زوایای  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  برابرند (چرا؟)، پس مثلث های  $OBC$  و  $OAD$  هم نهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می آید؛ یعنی :



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OC = OD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضرض } \Delta \\ \Rightarrow OBC \cong OAD \Rightarrow AD = BC \end{array}$$

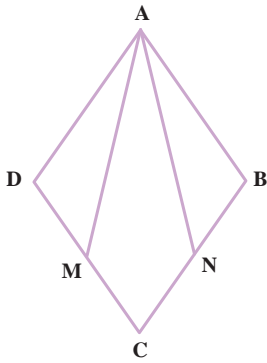
## فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، بوستانی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره وجود دارد بچه ها برای بازی از پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل برابر باشد؛ یعنی  $AC=BD$ . درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

- ۱- نشان دهید زاویه‌های  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید:  $AC=BD$
- ۲- به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید  $AC=BD$ .

## فعالیت

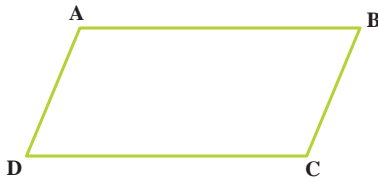


در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم  $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:
- فرض  $\begin{cases} AD = AB = \text{---} = \text{---} & , \quad BN = \text{---} \\ \hat{A} = \text{---} & , \quad \hat{B} = \text{---} & , \quad DM = \text{---} \end{cases}$
- حکم:  $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول، ثابت کنید مثلث‌های ADM و ABN هم‌نهشت‌اند.
- ۳- حال با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

## کار در کلاس

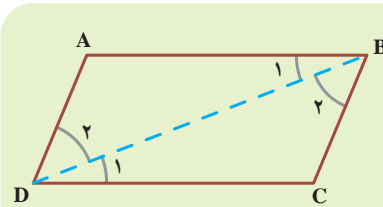


می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ نظر دو دانش‌آموز را دربارهٔ این مسئله ببینید و به سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید.

شبنم: می‌دانیم که در تعریف متوازی‌الاضلاع، برای ضلع‌های روبه‌رو آورده شده است. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است؛ با چشم هم می‌توان دید!

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟
- به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برای اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برای آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟



ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیایم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم؛ اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب} \implies \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ BD = \text{---} \text{ (ضلع مشترک)} \\ BD \text{ مورب و } \text{---} \implies \text{---} = \text{---} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle \cong \triangle$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  است؛ بنابراین داریم:  $AD = \text{---}$

و  $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$  است؛ بنابراین داریم:  $AB = \text{---}$

• چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ض ز) و

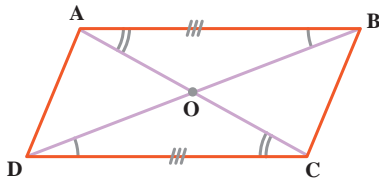
(ض ض ض) استفاده کنیم؟

• با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم

قطر AC به دست آوریم؟

- از هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.
- در هر متوازی‌الاضلاع \_\_\_\_\_ روبه‌رو، مساوی‌اند.

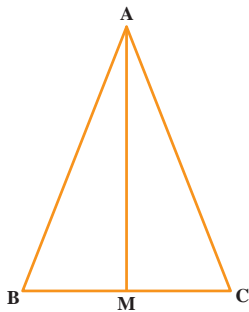
### تمرین



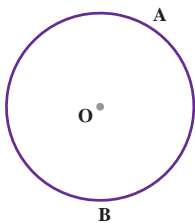
۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید:  $OA = OC$  و  $OB = OD$ .

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع

است!)



۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ چرا AM نیمساز زاویهٔ  $\hat{A}$  است؟ چرا AM بر BC عمود است؟



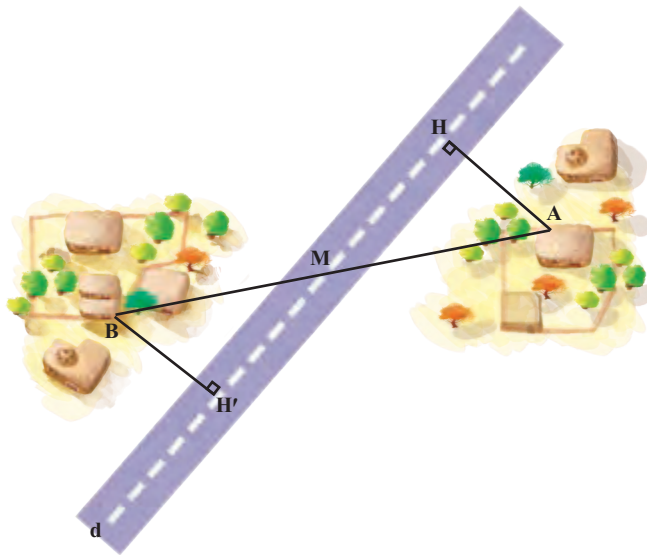
۴- از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازهٔ این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های M، A و B وصل کنید.)



## درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می‌توان مراحل را مشخص کرد که برای حل مسئله هندسه، توصیه می‌شود. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی معرفی می‌کنیم.

**مثال:** دو روستای A و B با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است: یعنی  $AH=BH'$ .



### قدم‌های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید.

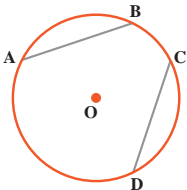
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی  $MA=MB$  است و AH و  $BH'$  بر d عمودند و حکم این است:  $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$ , $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

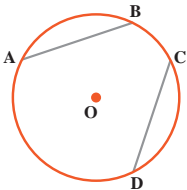
۴- برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟  
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \text{---} \hat{\quad} = \hat{\quad} \text{ (---)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و} \\ \text{یک زاویه حاده)} \end{array} \xrightarrow{\Delta \cong \Delta} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای} \\ \text{متناظر}} AH = BH'$$

## فعالیت



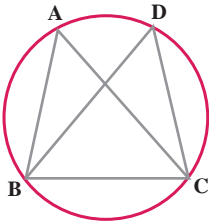
۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.  
نشان دهید کمان‌های  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD}$  مساوی‌اند.



۲- در شکل مقابل کمان‌های  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD}$  مساوی‌اند. نشان دهید  
وترهای AB و CD با هم برابرند.

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

## کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم  $AB=CD$ ،

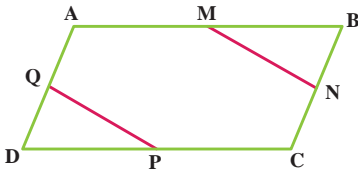
۱- چرا  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟

۲- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید:

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{cases} \\ \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \text{---} = \text{---}$$

۳- چرا  $AC=BD$ ؟

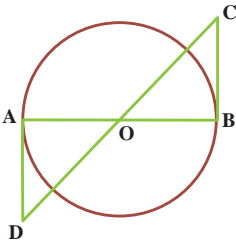
## تمرین



۱- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع

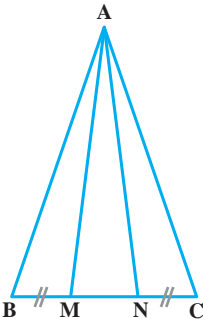
است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع

متوازی‌الاضلاع‌اند، ثابت کنید:  $MN=PQ$



۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و AD و BC بر دایره

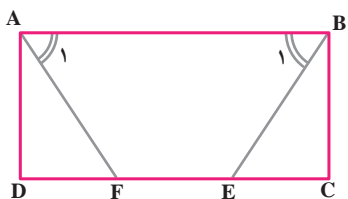
مماس‌اند، نشان دهید که AD و BC برابرند.



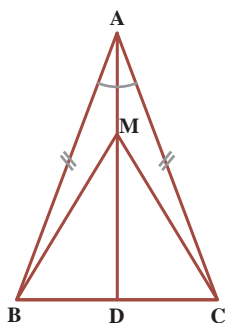
۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N

روی قاعده BC طوری قرار دارند که  $BM=NC$ .

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.



۴- در مستطیل  $ABCD$ ، پاره خط‌های  $AF$  و  $BE$  طوری رسم شده که دو زاویه  $A_1$  و  $B_1$  برابرند. ثابت کنید  $AF$  و  $BE$  مساوی‌اند.



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:  $MB=MC$ .

درس پنجم: شکل‌های متشابه

– در تصویرهای زیر، دو گل شبیه هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم‌اند؟



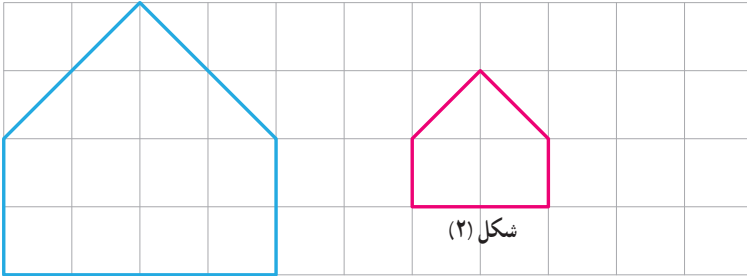
– در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟



– تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

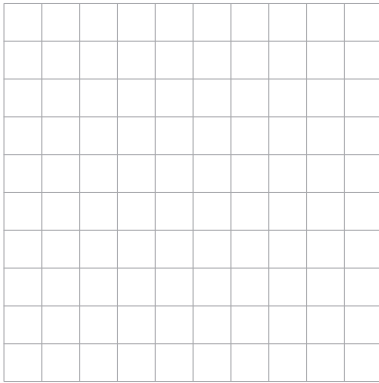


۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر است :



شکل (۱)

شکل (۲)



اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید :  
 چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟  
 چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟  
 اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های  
 شکل (۲) است؟

در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید  
 و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید؛ به طوری که اندازه  
 ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛  
 یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان  
 انقلاب و آزادی را پیدا کنید.



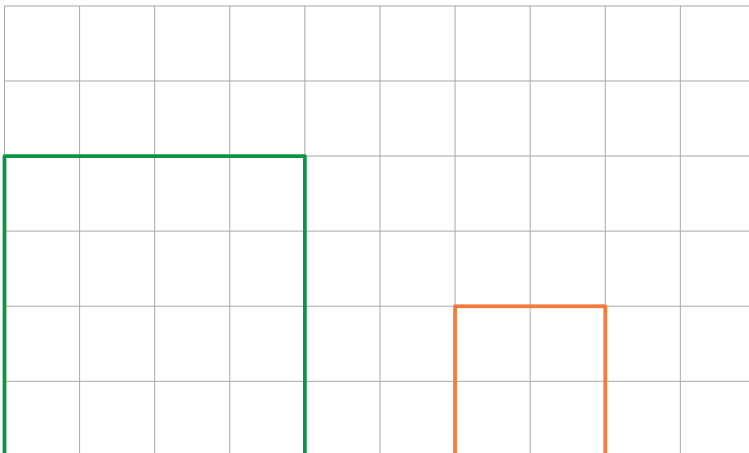
۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه  $50\%$  را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



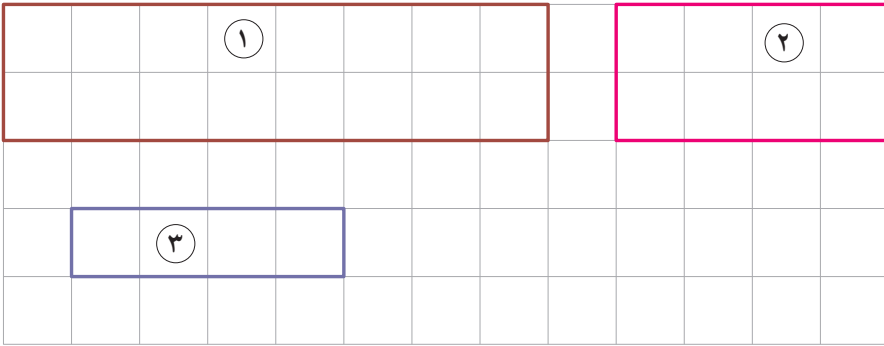
هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابه‌اند.

### کار در کلاس

۱- آیا دو مربع زیر متشابه‌اند؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌اند؟ چرا؟

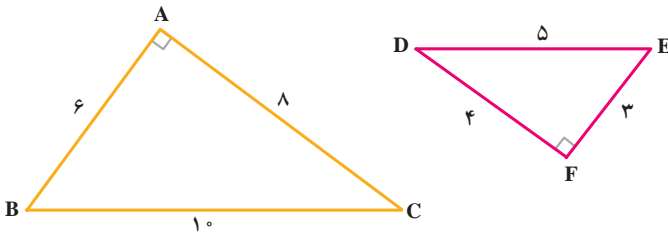


۲- از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟  
 آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه‌اند؟



## فعالیت

دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم‌رنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

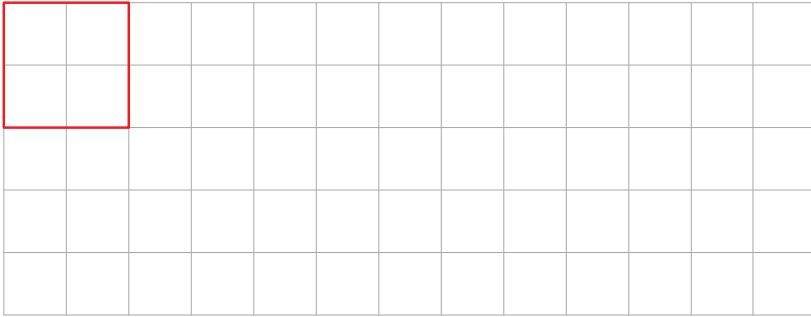


به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

## کار در کلاس

۱- با توجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید؛ به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع  $\frac{1}{4}$  باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟



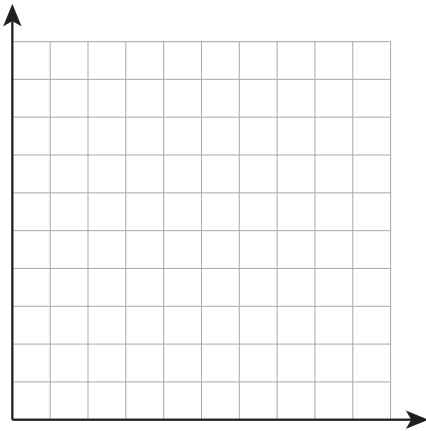


۲- در صفحهٔ مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

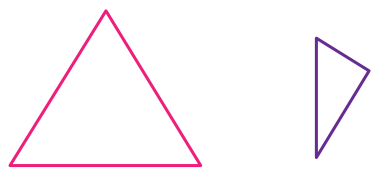
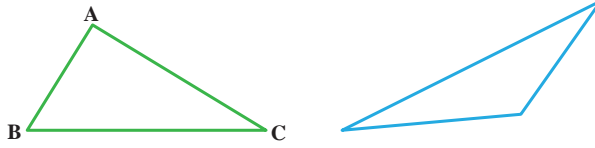
طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت تشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.



### تمرین

- ۱- آیا هر دو شکل هم نهشت با هم، تشابه نیز هستند؟  
در صورت تشابه بودن نسبت تشابه چند است؟
- ۲- آیا هر دو لوزی متشابه‌اند؟ چرا؟
- ۳- در یک نقشه، مقیاس  $200 : 1$  است. فاصلهٔ دو نقطه روی نقشه  $3/5$  سانتی‌متر است. فاصلهٔ این دو نقطه در اندازهٔ واقعی چقدر است؟
- ۴- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه‌اند؟ چرا؟
- ۵- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابه‌اند؟ چرا؟
- ۶- مثلث  $ABC$  به ضلع‌های  $4$  و  $5$  و  $8$  با مثلث  $DEF$  به ضلع  $1-x$  و  $10$  و  $x+7$  با هم متشابه‌اند (اندازهٔ ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار  $x$  را پیدا کنید.

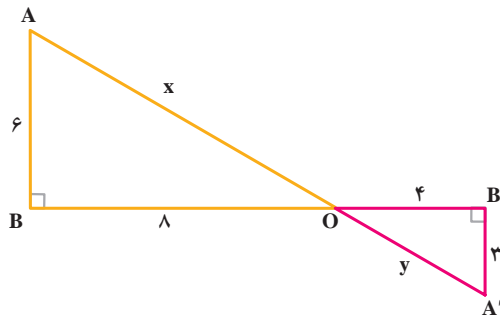
۷- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



۸- در شکل زیر

الف) مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید (به کمک قضیه فیثاغورس)

ب) آیا دو مثلث  $ABO$  و  $A'B'O$  متشابه اند؟ چرا؟





## درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر  $a$  عددی غیرصفر باشد،  $a^0=1$ .

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل  $2^{-3}$  چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

### فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$
	$2^2$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^0$	$2^0$	$2^0$	$2^0$	$2^0$

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا  $2^0$  با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} =$$

$$2^{-4} =$$

$$2^{-5} =$$

به طور کلی اگر  $a$  یک عدد غیرصفر باشد و  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

الف)  $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده‌ی زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید :

الف)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$       ب)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج)  $(-6)^{-3} = \frac{1}{\quad} = \quad = \quad$       د)  $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \quad = \quad = \quad$

به طور کلی اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $a \neq 0$  آن‌گاه:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارتهای برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید:  $(x \neq 0, y \neq 0)$

$2^{-2}$	$x^{-1}$	$(xy)^{-1}$	$(-2)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$	$xy^{-1}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
$\frac{1}{x}$	$5^3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{5}{2}$	$4$

۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} =$

و)  $1^{-2} =$

ب)  $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} =$

ز)  $\frac{(-3)^0}{3} =$

ج)  $-(-5)^2 =$

ح)  $-\frac{1}{2^{-2}} =$

د)  $-(-5)^{-2} =$

ط)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

ه)  $-5^{-2} =$

ی)  $2^0 - 2^{-1} =$

اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند، و  $a$  یک عدد دلخواه باشد، داریم:  $a^m \times a^n = a^{m+n}$   
 آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟  
 با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

## فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^3 \times 5^{-7} = \dots\dots\dots$$

در حالت کلی اگر  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند و  $a$  یک عدد دلخواه (غیرصفر)،  
 رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^4) \times (4x^3) = 24x^{-1+4+3} = 24x^6 \quad (x \neq 0)$$

## کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: ( $b, x, y \neq 0$ )

$$5^{-7} \times 5^{10} =$$

$$(-4)^{-9} \times (-4)^{-1} =$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} =$$

$$(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} =$$

$$b^{-2} \times b^{-3} =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} =$$

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد مخالف صفر و  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

## کار در کلاس

حاصل عبارتهای زیر را به صورت توان دار بنویسید.

الف)  $\frac{7^3}{7^5} =$

ب)  $2^{-2} \times 5^{-2} =$

ج)  $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} =$

د)  $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} =$

ه)  $\frac{2^8 \times 5^{1^0}}{2^4 \times 5^6} = 2^{8-4} \times 5^{1^0-6} =$

و)  $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} =$   $x, y, z \neq 0$

## تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف)  $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

ب)  $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

ج)  $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$

د)  $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه)  $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

و)  $(-2)^3 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود  $10^{-24}$  گرم است. جرم یک وزنه  $100$  کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- عددهای  $16^2$  و  $8^4$  و  $2^{11}$  را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴- در جاهای خالی علامت  $>$ ،  $<$  یا  $=$  قرار دهید:

الف)  $3^{-1} \bigcirc 3^{-2}$

ب)  $2^0 \bigcirc 2^{-5}$  ج)  $(0/5)^{-2} \bigcirc (0/6)^{-2}$

د)  $5^{-1} \bigcirc 5^0$

ه)  $\left(\frac{-8}{15}\right)^0 \bigcirc 1$  و)  $-5^{-2} \bigcirc (-5)^{-2}$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر  $x$  چه عددی است؟

الف)  $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

ب)  $5^x \div 5^{-2} = 5^4$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف)  $a^4 \times a^5 = a^{20}$

ه)  $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$

ب)  $a^4 \times a^5 = a^9$

و)  $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$

ج)  $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$

ز)  $6^{-2} = -\frac{2}{6}$

د)  $3^{-2} = -9$

ح)  $3^{-1} < 3^{-1}$

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3}$

ب)  $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

ج)  $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$

د)  $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$2^{-2}$  و  $1^{-9}$  و  $(-1)^{21}$  و  $(-7)^2$  و  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$  و  $2^3$  و  $5^{-2}$  و  $2^{-3}$

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^0 < 1^0$      $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$      $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$      $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}}$

ب)  $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$



فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های  $10^0$  یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های  $10^0$  خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	تقسیم بر $10^5$	ضرب در $10^5$	تقسیم بر $10^4$	ضرب در $10^4$	تقسیم بر $10^3$	ضرب در $10^3$	تقسیم بر $10^2$	ضرب در $10^2$	تقسیم بر $10^1$	ضرب در $10^1$
۱۵										
$2/100$										
$9/3$										

۲- سرعت نور  $300,000,000$  متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در  $100$  ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه‌حل این مسئله در ادامه داده شده است. آن را کامل کرده، توضیح دهید که پاسخ چگونه به دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در  $100$  ساعت می‌پیماید  $= 300,000,000 \times 360,000 = 108,000,000,000$  متر  
 ثانیه  $360,000 = 100$  ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد  $10^0$  نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند؛ بنابراین:

$$300,000,000 = 3 \times 10^8$$

$$360,000 = 3.6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3.6 \times 10^5 = 10.8 \times 10^{13} = 1.08 \times 10^{14}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$1700000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^2$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^2$$

قطر متوسط یک یاخته (سلول) گویچه<sup>۱</sup> (گلبول) قرمز  $7 \times 10^{-7}$  میلی متر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند  $7 \times 10^{-7}$  را هم می توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:

$$7 \times 10^{-7} = 7 \times 10^{-6}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود  $16 \times 10^{-6}$  سانتی متر است که با نماد علمی، آن را به صورت  $1/6 \times 10^{-3}$  نمایش می دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت  $a \times 10^n$  است که در آن  $1 \leq a < 10$  و  $n$  عددی صحیح است.

مثال:

$$1275000 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

$$13700 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$290000 = 2/9 \times 10^4$$

## کار در کلاس

۱- هر یک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245000 =$$

$$150000000 =$$

$$0/005 =$$

$$0/000061 =$$

$$1404 =$$

$$0/1275 =$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$$5/2 \times 10^{-3} =$$

$$7/304 \times 10^{-5} =$$

$$2/28 \times 10^8 =$$

$$9/4612 \times 10^9 =$$

$$6/02 \times 10^{-2} =$$

$$1/1 \times 10^4 =$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$$

$$\text{ب) } \frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$$

$$4/3 \times 10^2 = 4300$$

$$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$6/18 \times 10^7 = 61800000$$

$$8/2570 \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً  $695000$  کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری  $0.0000005$  متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود  $1/4 \times 10^9$  متر و قطر زمین حدود  $1/3 \times 10^7$  متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$$

$$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$$

۷- فاصله مریخ از زمین  $9/17 \times 10^7$  کیلومتر و فاصله کیوان از زمین  $6/287 \times 10^8$  کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^0 > 0.2 \quad 0.3 > 0.03 \times 10^0$$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$

## فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید :

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$(-\sqrt{5})^2 = \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = \quad 4^2 = \quad (-4)^2 =$$

مربع (توان دوم) عددهای ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند. همان گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با  $\sqrt{9}$  و  $-\sqrt{9}$  نمایش می‌دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	-۳			$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$				
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶						$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد  $\frac{4}{9}$ ، اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای  $\sqrt{7}$  و  $-\sqrt{7}$  هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم  $\sqrt{0} = 0$ .

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی مثبت باشد،  $\sqrt{b}$  و  $-\sqrt{b}$  را ریشه‌های دوم  $b$  می‌نامند. همان طور که می‌دانید، عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸			۶۴					

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی  $2^3=8$ . ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{8}=2$ . همچنین چون  $(-2)^3=-8$  ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{-8}=-2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ..... و ریشه سوم عدد  $-\frac{8}{27}$  عدد ..... است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید :

$$(\sqrt[3]{8})^3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{-27} =$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با  $\sqrt[3]{b}$  نمایش می‌دهیم. هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

## کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\begin{aligned} \sqrt{81} &= & \sqrt{4^2} &= & \sqrt{(-4)^2} &= & \sqrt{-1} &= \\ \sqrt{\frac{27}{125}} &= & \sqrt[3]{6^3} &= & \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} &= & \sqrt[3]{(-7)^3} &= \end{aligned}$$

۲- به کمک رابطه  $\sqrt{x^2}=|x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\begin{aligned} \sqrt{(-6)^2} &= & \sqrt{8^2} &= & \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} &= \\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} &= & \sqrt{(2-9)^2} &= & \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} &= \end{aligned}$$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها

حل شده است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= & \text{الف) } x \text{ و } y \text{ هر دو مثبت هستند } (x > 0, y > 0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= |x| + |y| = x - y & \text{ب) } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است } (x > 0, y < 0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= & \text{ج) } x \text{ منفی و } y \text{ مثبت است } (x < 0, y > 0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= & \text{د) } x \text{ و } y \text{ هر دو منفی هستند } (x < 0, y < 0). \end{aligned}$$

## ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  رابطه‌های زیر را آموختید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است.

### فعالیت

با توجه به عددهای داده شده  $a$  و  $b$  جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

$a$	$\sqrt[3]{a}$	$b$	$\sqrt[3]{b}$	$ab$	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷		$\frac{1}{8}$				
-۸		۲۷				

به طور کلی برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  داریم:  $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$  داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

### کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{8+۲۷}$$

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ است؛ در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\quad} =$$

$$3\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = \quad$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{\quad} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{\quad}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \quad$$

$$\frac{\sqrt{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = \quad$$

### تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 1^0$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$\sqrt{(-1)^2} = -1$	$\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\sqrt{(-5)^2} =  -5  = 5$	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\sqrt{1/44} = 1/2$	$(\sqrt{-1})^2 = 1$	$\sqrt[3]{-64} = -4$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\sqrt{125} \times \sqrt{36}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$$

۳

۳۰

-۹

-۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای  $a$  قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

۶- رابطه  $\sqrt{(-x)^2} = x$  به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب  $96a^2$  باشد، حجم آن را بر حسب  $a$  به دست آورید.

۸- اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$  را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید:  $\sqrt{9^0} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{1^0} = 3\sqrt{1^0}$

$$\sqrt{15^0}, \quad \sqrt{8^0}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$$

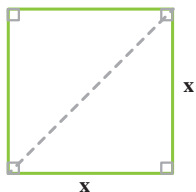
$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{1^0}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{6^0}}{\sqrt[3]{5}} =$$



## فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن  $2\sqrt{6}$  متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه ————— داریم:  $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه:  $2x^2 = 24$  و از آنجا  $x^2 = 12$

بنابراین ————— این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ————— مربع  $\sqrt{12}$  متر یا  $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر  $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$  = مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت  $3\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2}$  دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم:

$$7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات  $2\sqrt{5}$  و  $\sqrt{2}$  یا عبارات  $7\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  یکسان نیستند.

## کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	$\sqrt{xy}$	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$				

## ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

### فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.  
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:  
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times \quad} = 4\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{\quad} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{\quad} - \quad + \quad = 5\sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{\quad} + 2\sqrt[3]{\quad} + 3\sqrt[3]{\quad} = 5\sqrt{\quad} + 5\sqrt[3]{\quad} \end{aligned}$$

مثال ۱: حاصل  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  را به دو روش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

مثال ۲: حاصل  $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$  را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۱) \sqrt{۹۸} - \sqrt{۵۰} + \sqrt{۱۲۸}$$

$$۲) \sqrt{۲۷} - \sqrt{۱۲} - \sqrt{۷۵} + \sqrt{۴۸}$$

$$۳) ۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۵۴} - ۴\sqrt{۱۲۸}$$

$$۴) \sqrt{۴ + \frac{۱}{۸۱} + \frac{۴}{۹}}$$

$$۵) (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$$

### گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبهٔ  $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$  باید عدد ۲۰ را بر  $\sqrt{۲}$  تقسیم کنیم؛ در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{۲۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$$

### فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است، راه‌حل را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\text{ب) } \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} \times \frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۵^۲}}{۵}$$

$$\text{ج) } \frac{۴}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}} = \frac{۴}{\frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۳}}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۴}} \times \frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۴}} = \frac{۴\sqrt{۳}\sqrt{۴}}{۴}$$

$$\text{د) } \frac{۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۱۴}}{\sqrt[۳]{۱۴}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۱۴}}{۲}$$

$$\text{ه) } \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲x}}{x} \quad (x > 0)$$

$$\text{و) } \frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{z}}{\sqrt[۳]{z}} = \frac{۵\sqrt[۳]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{6}{\sqrt{2}}$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{32}}$

ج)  $\frac{12}{\sqrt{6}}$

د)  $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}$

( $x \neq 0$ )

## تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف)  $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$       ج)  $\sqrt[3]{27^2}$       ه)  $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب)  $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$       د)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$       و)  $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

۲- اگر  $x < 0$  باشد، حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

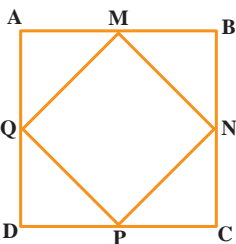
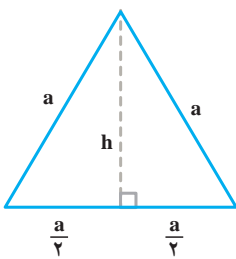
۳- محیط و مساحت مربعی به ضلع  $3\sqrt{5}$  سانتی متر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع  $a$  نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع  $h$  را بر حسب  $a$  به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب  $a$  بنویسید.



۵- نقاط  $M, N, P, Q$  وسط‌های اضلاع مربع  $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع  $ABCD$ ،  $100$  مترمربع باشد، محیط مربع

$MNPQ$  چقدر است؟

۶- در جاهای خالی علامت < یا = یا > بگذارید :

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \bigcirc \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

$$\sqrt{\square} = 10 \quad \text{ب) } 2\sqrt{\square} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\square} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\frac{2^{-5}}{2^0} = \sqrt{64} \quad \text{و) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^0 \quad \text{ز) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m^0} = m \quad \text{ح) } 9\sqrt{-27} = \frac{0^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$$

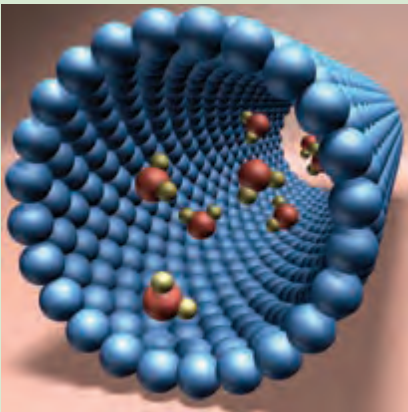
$$\text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}}$$

۹- آیا تساوی  $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$  همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر  $x \geq 0$ ، تساوی

درست است.

## خواندنی



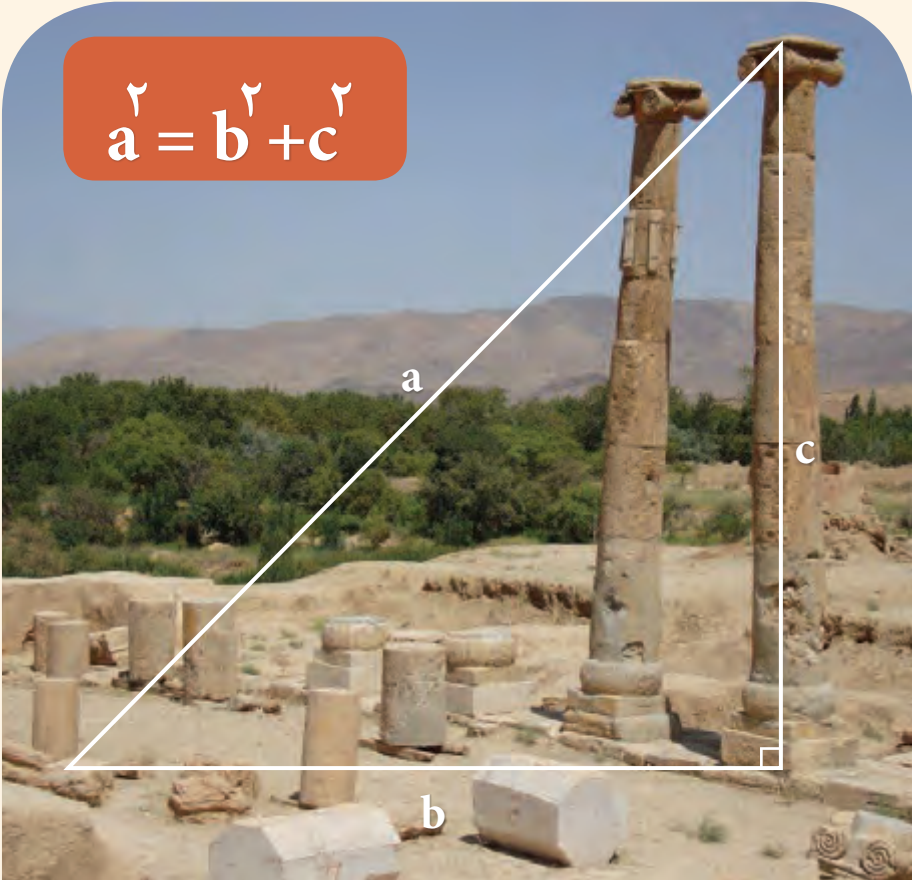
فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر  $10^{-9}$  متر؛ یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.



# عبارت‌های جبری



$$a^2 = b^2 + c^2$$



عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال رابطه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، تک جمله ای<sup>۱</sup> (یک جمله ای) می نامیم.  
عبارت های زیر همگی تک جمله ای هستند.

$$7, x, 5x^3, -\sqrt{3}a^3x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{v}$$

و عبارت های زیر تک جمله ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه قسمت های حرفی دو یا چند تک جمله ای یکسان باشند، به آنها تک جمله ای های متشابه گفته می شود؛ به عنوان مثال تک جمله ای های  $4x^2y$  و  $\frac{5}{4}x^2y$  و  $-3x^2y$  متشابه اند، اما تک جمله ای های  $3x^2$  و  $3x$  متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه ها به دست آورید:

$$۱) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$۲) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) (-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 =$$

$$۴) \left(\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{v}a^2c^5\right) =$$

$$۵) 2(5xy^4)^2(-2x^5y^2) =$$

$$۶) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) =$$

در تک جمله ای  $5a^2x^2y$ ، توان متغیر  $a$  برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این تک جمله ای نسبت به متغیر  $a$ ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به  $x$ ، ۳ و درجه نسبت به  $y$ ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر  $x$  و  $y$  را برابر با  $4 = 3 + 1$  تعریف می کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

تک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	۲+۴=۶
$5x^4y^3z^2$				
$-12x^2u$				
$\frac{3}{5}$				

تک جمله‌ای‌های  $3x^2y^3$  و  $-5x^2y^2$  را که مشابه نیستند، تک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی تک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند تک جمله‌ای یا جمع جبری چند تک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{2}axy^2 - axy, \quad 3x^4$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای  $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه تک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است. معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف)  $3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$

ب)  $-3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$       ج)  $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^3y - 4$

## کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف)  $-5a^2 - 3ax + x^2 - (4x^2 + 5ax - 3a^2) =$



ب)  $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)] =$

ج)  $(4x + 5x^2)(x^2 - x + 1) =$

د)  $(x + x^2)(x^2 + x^2 + 1) =$

هـ)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x^2 - 2) =$

۱- به ازای مقادیر داده شده برای  $x$ ، جدول زیر را کامل کنید :

$x$	$x^2$	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
۰				
۵				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر  $x$  ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حاصل عبارت جبری  $(x+3)^2$  را به دست آورید و آن را با عبارت جبری  $x^2 + 6x + 9$  مقایسه کنید.

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = \text{_____}$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل

یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری  $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$  یک اتحاد است.

برابری  $3x - 3 = x + 1$  را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای  $x=2$ ، به دست آورید.

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای  $x$  بررسی کنید.

همان طور که می‌دانید، به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف)  $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$





اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای  $ab+ac$  را به ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده ایم:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac=a(b+c) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{(ب.م.م.)} \end{array}$$

بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف)  $8x^2 + 12x = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3$

$$= 4x(2x + 3) \quad (\text{ب.م.م.}) = 4x$$

(با توجه به خاصیت پخش‌ی)

ب)  $6a^4 - 18a^2 =$

ج)  $7x^4 - 14x^2 + 21x^2 =$

د)  $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y =$

## کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای  $a^2 + 2ab + b^2$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت  $(a+b)^2$  بنویسیم، در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف)  $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$

مربع کامل  $(3)$   $(x)$   $2(x)(3)$  مربع کامل

ب)  $x^2 - 4x + 4 = ( \quad - \quad )^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

ج)  $n^4 - 10n^2 + 25 = ( \quad - \quad )^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

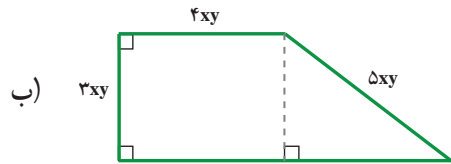
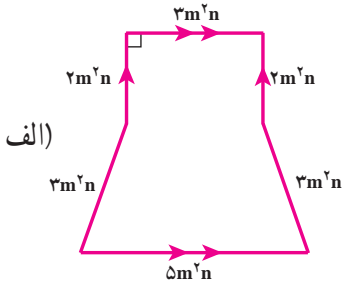
د)  $18ax^2 + 24axy + 18ay^2 = 2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 2a( \quad + \quad )^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{(ب.م.م.)} = 2a \end{array}$$

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف)  $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^3$       ب)  $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$   
 ج)  $(x^m - 1)(x^m - 1)$       د)  $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف)  $(5y - 3x)^2 =$       ب)  $(-3a^2 - a)^2 =$   
 ج)  $(8x - \frac{1}{3})^2 =$       د)  $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$       ب)  $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف)  $2x^2 + 8x^2 + 8x$       ب)  $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2$   
 ج)  $a(x+1) + b(x+1)^2$       د)  $a^3 - 2a^2 + a$   
 هـ)  $x^2y^2 - 4xy + 4$       و)  $25x^2 + 30x^2 + 9x^2$

۶- با تبدیل  $b$  به  $-b$  در اتحاد  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\underbrace{(a + (-b))^2}_{(a-b)^2} =$$

## فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{روش اول: } (a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) =$$

$$\text{روش دوم: } ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + \dots$$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

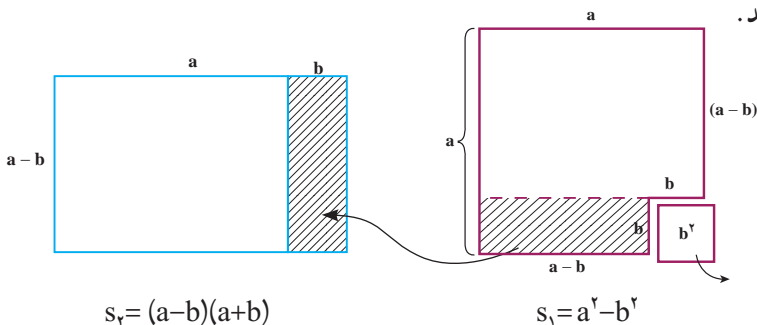
$$(a+b-c)^2 =$$

۲- با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) =$$

اگر  $a$  و  $b$  مثبت و  $b < a$  باشد، به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  را

نتیجه بگیرید.



از آنجا که  $s_1 = s_2$ ، بنابراین داریم:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.

## کاردرکلاس

۱- تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

$$۱) (1+a)(1-a) = 1 - \dots$$

$$۳) (t + \dots)(t - \dots) = t^2 - 9$$

$$۲) (2a+5)(2a-5) = \dots - 25$$

$$۴) (a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + \dots$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

$$۱) (10-x)(x+10) = (10-x)(10+x) = 100 - x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = (\text{---} - y)(-2z+y) = 4z^2 - \text{---}$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) =$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) =$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] =$$

## فعالیت

از اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x+3)(\text{---})$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = (\text{---} + \text{---})(\text{---} - \text{---})$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - \text{---}][(\text{---}) + y]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (\text{---})][1 + (\text{---})]$$

$$= (\text{---})(1 + 3a + z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(\text{---}) - (\text{---})][(\text{---}) + (\text{---})]$$

$$= (-x-3)(\text{---} + \text{---})$$

$$۶) x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(\text{---} - \text{---})$$

$$= (x^2 + y^2)(x+y)(\text{---} - \text{---})$$

## کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را

به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟  
 ۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را ساده کند. به کمک اتحادها، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = \text{————} =$$

$$497 \times 503 = \text{————} \times \text{————} =$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = \text{————}$$

## فعالیت

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است؟  
 بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

$$\text{الف) } (x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

$\begin{matrix} \leftarrow & & \rightarrow \\ 2+5 & & 2 \times 5 \end{matrix}$

$$\text{ب) } (x+9)(x-4) = x^2 - 4x + 9x - 36 = x^2 + 5x - 36$$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (\quad)x + \text{————}$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x + \quad)(x + \quad)$$

$$\text{الف) } x^2 + 7x + 10 = (x + \quad)(\quad + \quad)$$

$$\text{ب) } x^2 + 7x + 12 = (x + \quad)(\quad + \quad)$$

$$\text{ج) } y^2 + y - 6 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$\text{د) } y^2 - y - 6 =$$

$$\text{ه) } y^2 + 5y + 6 =$$



۳- تجزیه عبارت  $x^2 + 1 \cdot x - 24$  را چهار نفر از دانش آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

- جواب نفر سوم:  $(x-2)(x+12)$   
 جواب نفر اول:  $(x+6)(x-4)$   
 جواب نفر چهارم:  $(x-12)(x+2)$   
 جواب نفر دوم:  $(x+6)(x+4)$

### تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

- الف)  $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x)$       د)  $(3x+y-z)(3x+y+z)$   
 ب)  $(5x+4)(5x+3)$       ه)  $(x-1)(x+1)(x^2+1)$   
 ج)  $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})$       و)  $(x-2)(x+2)(x^2+3)$

۲- در قسمت های جای خالی، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

- الف)  $(xy-z)(xy+z) = \text{---} - z^2$       ج)  $(x+a)(x-b) = x^2 + \text{---} - \text{---}$   
 ب)  $(\text{---} + \sqrt{5})(\text{---} - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}y^2 - \text{---}$       د)  $(x^2 + \text{---})(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - \text{---}$   
 ۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

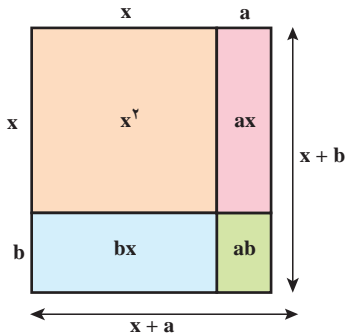
- الف)  $a^2 - 8a + 15$       و)  $x^2 - 13x + 36$   
 ب)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$       ز)  $x^2 - 12x + 36$   
 ج)  $x^2 + 1 \cdot x + 24$       ح)  $(x+y)^2 - 9$   
 د)  $x^2 - 2x - 8$       ط)  $bx^2 - 5bx - 5 \cdot b$   
 ه)  $4ax^2 - a$       ی)  $x^4 - 5x^2 + 4$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر  $a=b$  باشد، چه اتحادی به دست می آید؟ اگر  $a$  و  $b$  قرینه باشند،

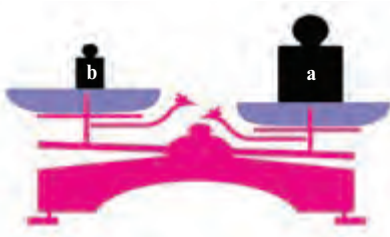
کدام اتحاد به دست می آید؟

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبه رو، اتحاد

جمله مشترک را به دست آورید.



## فعالیت



روی کفه‌های ترازو دو وزنه  $a$  و  $b$  کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه  $a$  از وزنه  $b$  سنگین‌تر است. — با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای  $>$ ،  $<$ ،  $=$  را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های  $a$  و  $b$  را با هم مقایسه کنید.

$$a \square b, a \square b, b \square a$$



در شکل بالا اگر وزنه‌ای  $p$  کیلوگرمی باشد، به طوری که  $a=b+p$ ، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه  $p$  کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشد؛ به طوری که  $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند  $p$  هست؛ به طوری که  $a = b + p$ .

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف)  $x = y + 4 \Rightarrow x > y$

ج)  $a - 2 = b + 3$

ب)  $m + 1 = n + 3$

د)  $2m = 3n \quad (m, n > 0)$

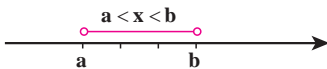
هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت‌های « $a$  بزرگ‌تر از  $b$ » یا « $a$  کوچک‌تر از  $b$ » یا « $a$  برابر با  $b$ » را خواهیم داشت.

چنانچه عدد حقیقی  $a$  منفی نباشد در این صورت  $a > 0$  یا  $a = 0$  است. در این حالت می‌نویسیم  $a \geq 0$  و می‌خوانیم  $a$  بزرگ‌تر یا برابر با  $0$  است؛ مانند  $2 \geq 0$  یا  $0 \geq 0$ .

چنانچه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، به طوری که  $a$  از  $b$  کمتر نباشد، در این صورت  $a > b$  یا  $a = b$  است. در این حالت می‌نویسیم  $a \geq b$ .

برای سه عدد حقیقی  $a$  و  $b$  و  $x$  به طوری که عدد دلخواه

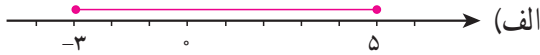
$x$  بین اعداد  $a$  و  $b$  باشد ( $a < b$ )، می‌نویسیم:  $a < x < b$ .



مانند:  $1 < 2 < 5$



۱- مناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) اگر  $a+b > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هر دو مثبت اند.

(ب) اگر  $ab > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هم علامت هستند.

(ج) اگر  $\frac{ab}{c} < 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  و  $c$  منفی هستند.

(د) اگر  $a^2b < 0$  آنگاه،  $b$  منفی است.

۳- عبارات‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ تر است.

• قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ از ۸ کوچک تر است.

## فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری‌های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7}$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-10}$$

**خاصیت ۱:** اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند  $c$  جمع کنیم، نابرابری

همچنان برقرار است؛ یعنی اگر  $a > b$  آنگاه  $a + c > b + c$ .

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری‌ها تغییر می‌کنند؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times^{\circ}}$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times(-1)}$$

**خاصیت ۲:** اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند  $c$  ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر  $a > b$  و  $c > 0$  آنگاه  $ac > bc$ .

**خاصیت ۳:** اگر دو طرف نابرابری  $a > b$  را در عدد منفی  $c$  ( $c < 0$ ) ضرب کنیم، در این صورت داریم:  $ac < bc$ .

۳- نابرابری  $2x+1 > 7$  را در نظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر  $x$  است و درجه نسبت به  $x$  با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، **نامعادله یک مجهولی درجه اول** می‌گوییم. در جدول زیر مقادارهای داده شده را به جای  $x$  قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ $\downarrow$ $-1 > 7$ نادرست				

مجموعه مقداری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، **مجموعه جواب نامعادله** است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

– دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

– دو طرف نامعادله حاصل را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

– با توجه به نابرابری  $x > 3$ ، در می‌یابیم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با  $D$  نمایش دهیم، خواهیم داشت:  $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$ . می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت زیر نمایش داد.



$$2x + 1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \quad \text{_____}$$

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف)  $2x + 7 \geq 15$

ب) 
$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6 \times \frac{x}{3} - 6 \times \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6}$$

$$\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$$

$$\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$$

ج)  $3(x-1) \geq 2x+1$       د)  $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$

## تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای  $<$  یا  $>$  را جایگزین کنید.

الف)  $a = b = 1$  است. در این صورت  $a \square b$ . ج) اگر  $2(p-1) = 2q-3$ ، در این صورت  $p \square q$ .

ب) اگر  $u-v = -2$ ، در این صورت  $u \square v$ . د) اگر  $\frac{a-b}{4} = -3$ ، در این صورت  $a \square b$ .

۲- علامت عددهای حقیقی  $a, b, c$  را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف)  $\frac{ac}{b^2} < 0$       ب)  $\frac{a}{bc} > 0$       ج)  $ab > 0$       د)  $\frac{a^2}{bc} > 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $2(x-3) + 5 < 5-x$       ج)  $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

ب)  $3-2x \geq 5(3-2x)$       د)  $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر  $a^2 > b^2$  آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت،  $a > b$ ؟

۵- اگر  $a, b > 0$  و  $a^2 > b^2$ ، نشان دهید  $a > b$  (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید).

۶- عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.

ب) مجموع نصف عدد  $a$  و چهار برابر عدد  $b$ ، حداکثر ۶ واحد است.

۷- دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند. آنها در این جنگل به منابع غذایی دسترسی ندارند. برای همین همراه خود مواد غذایی‌ای برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان روزانه حداقل به اندازه سه برابر وزن خود انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

## خوارزمی

خوارزمی، ابو عبدالله، محمد بن موسی، متولد خوارزم بوده و حدود سال ۲۳۲ هـ ق فوت کرده است. این ریاضی‌دان، منجم، جغرافی‌دان و مورخ ایرانی یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم زمان خود بود. کتاب جبر و مقابله خوارزمی از آغاز تألیف، یعنی اوایل قرن سوم هجری برابر با قرن نهم میلادی و تا قرن شانزدهم میلادی، نزد ریاضی‌دانان به عنوان سند و حجت شناخته می‌شده است. در زیر بخشی از مقدمه کتاب جبر و مقابله و ترجمه آن آمده است.



به نام خداوند بخشنده مهربان

خدای راسپاس بر نعمت‌هایش، بدان گونه که شایسته اوست؛ سپاسی آن چنان، که اگر بر آیینی که بر بندگان ستایشگر او فرض شده انجام شود «شکر» نامیده می‌شود، و باعث افزونی نعمت می‌گردد، و ما را از دگرگونی‌های روزگار در امان می‌دارد تا به خداوندی‌اش گردن نهیم، و خویشتن را در پیشگاه عزتش ناچیز شمیریم، و در برابر کبریا و عظمتش فروتن شویم. خدایی که محمد (ص) را در روزگاری به پیامبری فرستاد که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده، و حق ناشناخته مانده، و راه رستگاری ناپیدا گشته بود؛ پیامبری که با آمدنش کوردلان بینا شدند و گمراهان از هلاکت‌هایی یافتند؛ به وجودش هر اندکی فزونی گرفت و هر پراکندگی به پیوستگی و یگانگی انجامید.



بخشی از سقف صحن و سرای حرم مطهر سیدالشهدا، امام حسین (ع)

کاربرد هندسه و خطها در فرش بافی، کاشی کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیرقابل انکار و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان می‌شود.

## درس اول: معادله خط



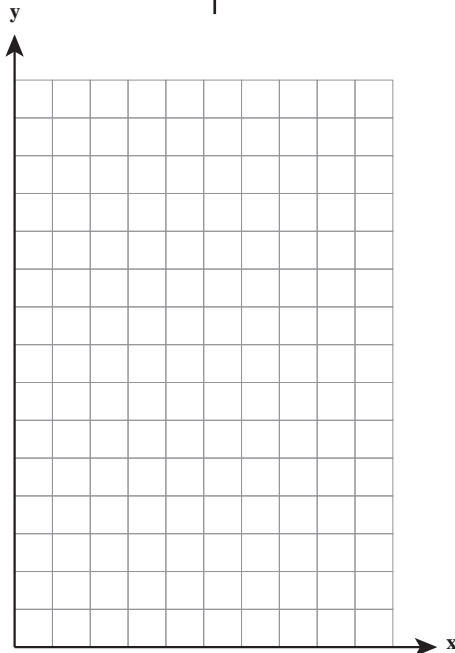
وقتی دوچرخه سواری در حال حرکت است، بین زمان و مسافتی که او طی می‌کند، رابطه‌ای وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه‌ای دیده می‌شود. در الگوی عددی زیر نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه‌ای هست که به صورت  $n \rightarrow 2n$  نمایش داده شده است:

۱	۲	۳	۴	...	n
↓	↓	↓	↓		↓
۲	۴	۶	۸	...	2n

## فعالیت

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می‌کند. جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر) y	۰	۲						



بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه‌ای هست؟

پس از  $100$  ثانیه چه مسافتی طی شده است؟

اگر  $x$  ثانیه بگذرد، چه مسافتی طی شده است؟

زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید

و به صورت  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  نشان دهید و نمایش هر نقطه را

روی نمودار مشخص کنید؛ این نقطه‌ها چه ویژگی

مشترکی دارند؟

اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، چه شکلی

به دست می‌آید؟



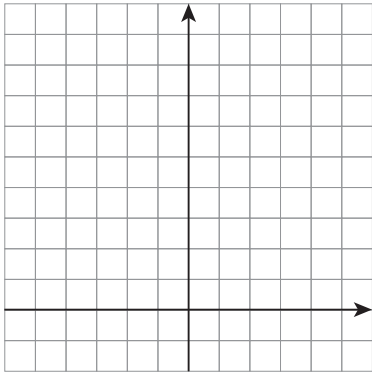
## کار در کلاس

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با  $x$  و محیط آن را با  $y$  نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  هست؟

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}$$

(x) ضلع →      (y) محیط →

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با  $x$  و مساحت مربع را با  $y$  نشان دهیم، بین  $x$  و  $y$  چه رابطه‌ای هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع $x$ (سانتیمتر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت $y$ (مربع سانتیمتر)	۰	۰/۲۵	۱				
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$						

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟

## فعالیت

۱- معادله  $x+y=1$  چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

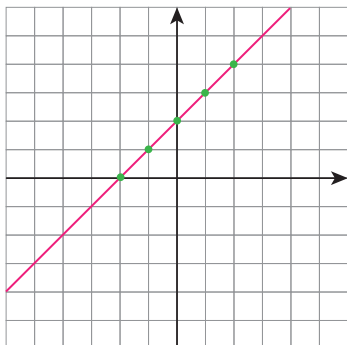
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد؟

آیا تساوی برای  $x=2$  و  $y=5$  برقرار است؟

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



(طول نقطه) x	۰	۱	-۱	۲	-۲
(عرض نقطه) y	۲				
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$				

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید.  
۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 12$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

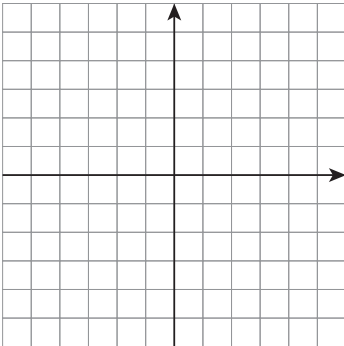
توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست ساده‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ؟

هر معادله به صورت کلی  $y = ax + b$  معادله یک خط است؛ زیرا در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می‌آید؛ به همین دلیل می‌گوییم  $x$  و  $y$  با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا بی‌شمار جواب دارد؛ ولی اتحاد نیست.

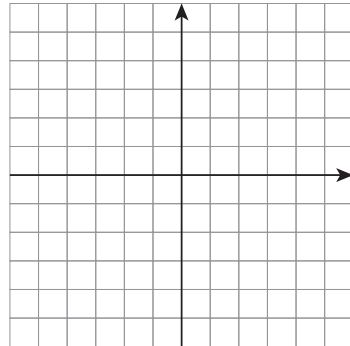
به عنوان مثال  $y = x + 2$  معادله یک خط است که در آن  $a = 1$  و  $b = 2$  فرض شده است و نمودار آن را در بالا ملاحظه کردید.

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

$$y = -x + 3$$



$$y = \frac{3}{2}x$$



۲- آیا خط  $y = 3x$  از مبدأ مختصات (یعنی نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ) می‌گذرد؟ چرا؟

۳- اگر در معادله  $y = ax$  به جای  $a$  عددهای مختلفی قرار دهیم، بی‌شمار معادله خطی مانند  $y = 3x$ ،

$y = 2x$ ،  $y = -x$  و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟

$y = ax$  صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

## فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه

با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد، مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به دست آورید.

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$  روی خط قرار دارد؟

## کار در کلاس

۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط  $y=2x-1$  پیدا کنید.

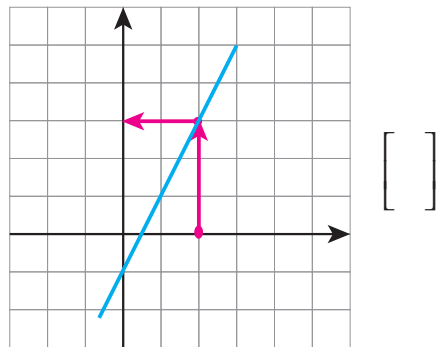
با استفاده از معادله خط

$$y = 2x - 1$$

$$\downarrow$$

$$y = 2 \times 2 - 1$$

با استفاده از نمودار خط



۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط  $y = -\frac{1}{4}x + 2$  پیدا کنید.

۳- مختصات محل برخورد خط  $y=5x+1$  را با محورهای مختصات پیدا کنید.

## تمرین

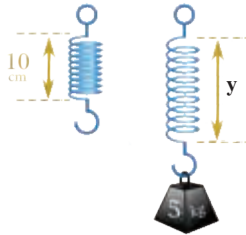
۱- خط به معادله  $y = \frac{1}{4}x + 4$  را رسم کنید.

(الف) آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  روی این خط است.

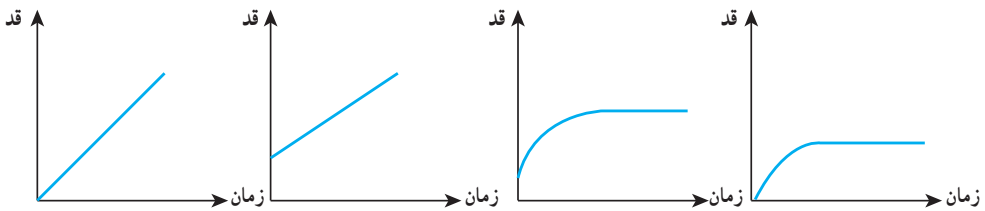
(ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

(ج) نقطه‌ای از این خط، به طول ۱- را پیدا کنید.

۲- طول یک فنر  $10^\circ$  سانتی متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم  $x$  به آن وصل شود، طول فنر از رابطه  $y = 10 + 0.8x$  پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم  $5$  کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟



۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور  $y$  به چه معناست؟



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید.

الف)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$       ب)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$       ج)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله  $y = -x + 2$  را با محورهای مختصات بیابید.

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله  $y = -\frac{3}{5}x + 4$  را بیابید که طول آن نقطه  $5$  باشد.

۷- خط  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  را رسم کنید.

آیا نقطه  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول  $1$  روی این خط پیدا کنید.

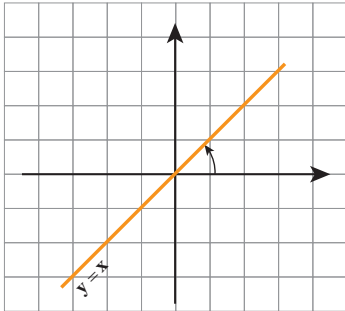
نقطه‌ای به عرض  $2$  روی این خط پیدا کنید.

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

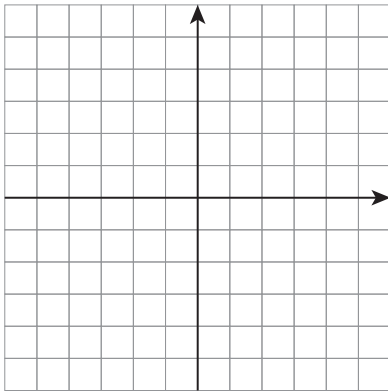
## فعالیت

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف)  $y = \frac{1}{3}x$     ب)  $y = x$     ج)  $y = 3x$     د)  $y = -x$     هـ)  $y = -2x$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؛ تفاوت آنها در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب  $x$  و این زاویه وجود دارد؟ خط‌های د و هـ چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد؟



۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y = 2x - 1$  ,  $y = 2x$  ,  $y = 2x + 3$

در معادله این خط‌ها ضریب  $x$  برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور  $x$  با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی‌اند؟

بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟

در معادله خط  $y = ax + b$ ، عدد  $a$ ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر  $a$  زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد  $b$  نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌هاست؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

به عنوان مثال در خط به معادله  $y = -3x + 2$ ، عرض از مبدأ ۲ و شیب خط، -۳ است.

۱- در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$$y = 2x - 4$$

$$y = -\frac{2}{3}x$$

$$y = -3x + 1$$

۲- معادله خطی را بنویسید که :

(الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد.

(ب) شیب آن  $\frac{1}{4}$  باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

(ج) با خط  $y = 2x + 1$  موازی باشد و از نقطه  $\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$  بگذرد.

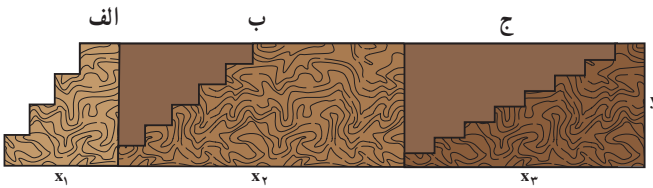
۳- معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه  $\left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$  بگذرد.

$$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow \boxed{b = \quad} \xrightarrow{\text{معادله خط}} \boxed{y = \quad}$$

$\downarrow$              $\downarrow$      $\downarrow$   
 ۲            ۲        ۱

## فعالیت

۱- در تصویر زیر، سه نوع راه پله می‌بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید، یکسان است.



کدام راه پله شیب

بیشتری دارد؟

کدام یک، تعداد پله،

بیشتری دارد؟

بالا رفتن از کدام یک ساده‌تر است؟

۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب

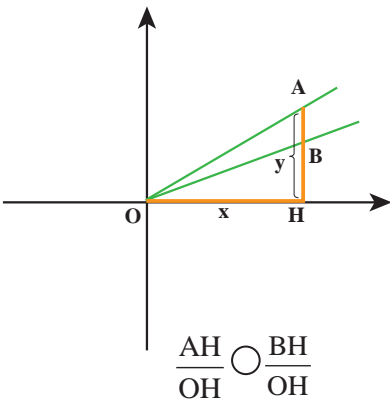
بیشتری دارد؟

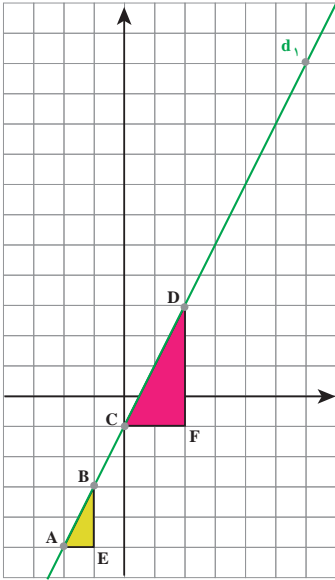
نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها

متفاوت است.

کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟





۳- روی خط  $d_1$  به معادله  $y = 2x - 1$  دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثلث قائم الزاویه ایجاد شده، شیب خط را به دست آورده ایم.

$$d_1 \text{ شیب خط} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثلث رسم شده، شیب خط را پیدا کنید.

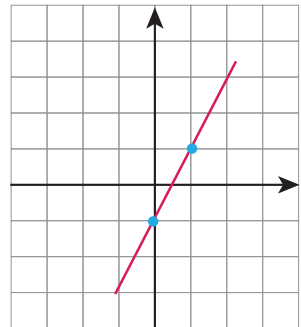
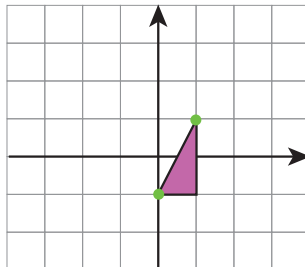
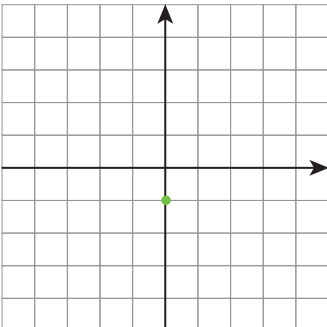
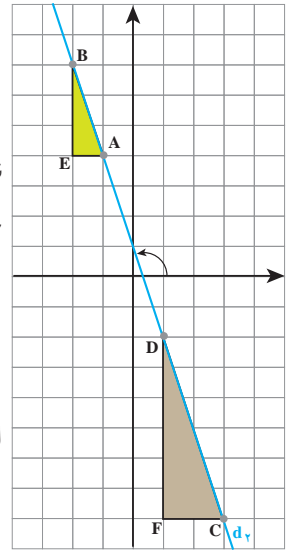
دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثلث قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

۴- خط  $d_2$  با محور طول، زاویه بزرگتر از  $90^\circ$  می سازد؛ پس شیب خط، منفی می شود. با توجه به مثلث های رسم شده مقدار شیب خط  $d_2$  را پیدا کنید.

$$d_2 \text{ شیب خط} = -\frac{EB}{EA} =$$

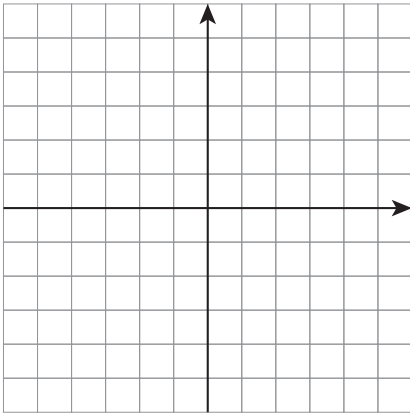
خط  $d_2$  محور عرض ها را در نقطه  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right]$  قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادله خط  $d_2$  را بنویسید.

۵- با توجه به این بیان از شیب خط، در زیر مراحل رسم معادله خط  $y = 2x - 1$  با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید.



(۱) خط از این نقطه می گذرد. (۲) با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود. (۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می شود.





۱- نقطه‌های  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آنها را بنویسید.  $\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با:

یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید:  $\begin{bmatrix} 2 \\ \quad \end{bmatrix}$   
 تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرند و معادله آنها به صورت  $x=2$  است.

۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت  $ax+by=c$  است.

(الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟

$$a=2, b=3, c=4 \rightarrow$$

$$a=-1, b=2, c=0 \rightarrow$$

(ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا کنید.

$$-3x+2y=2 \rightarrow a= \quad b= \quad c=$$

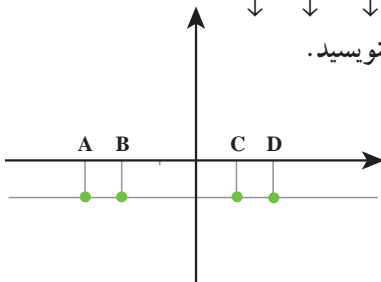
$$y=2x+1 \rightarrow a= \quad b= \quad c=$$

(ج) برای خط  $x=2$  مقدارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را بنویسید.

$$ax + by = c \rightarrow x = 2$$

↓ ↓ ↓

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟

معادله خط رسم شده را بنویسید.

در شکل کلی معادله‌های خطی به جای  $a$ ،  $b$  و  $c$  چه عددی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده

به دست آید؟

$$ax + by = c$$

↓   ↓   ↓

۴- مانند نمونه برای خط‌های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.

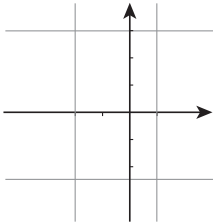
$$2y - 4x = 8 \rightarrow 2y = 4x + 8 \rightarrow y = \frac{4}{2}x + \frac{8}{2} \rightarrow y = 2x + 4$$

↑   ↑  
شیب   عرض از مبدأ

$$3x - 2y = 6$$

$$x + 3y - 9 = 0$$

## کار در کلاس



۱- معادله‌های خط‌های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل

کنار هر کدام بنویسید.

۲- از برخورد دو خط  $y = -3$  و  $x = 2$  کدام نقطه به دست می‌آید؟

۳- معادله‌ای خطی بنویسید که موازی محور  $x$ ‌ها باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

## تمرین

۱- خط‌های به معادله  $y = 3$  و  $x = -2$  را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه

بین این دو خط چند درجه است؟

۲- معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

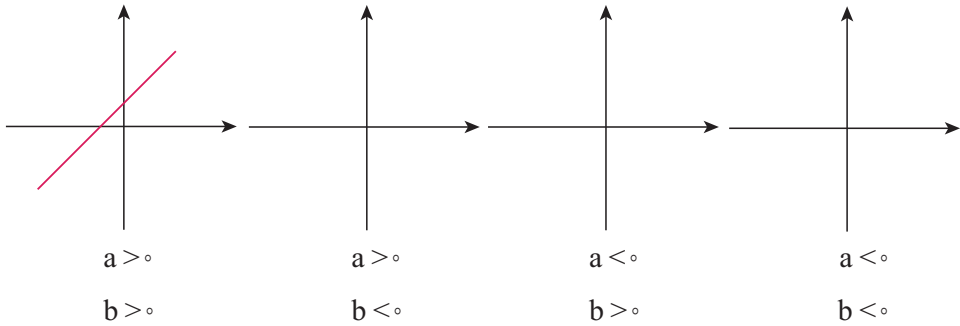
۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

$$3y - 2x = 6$$

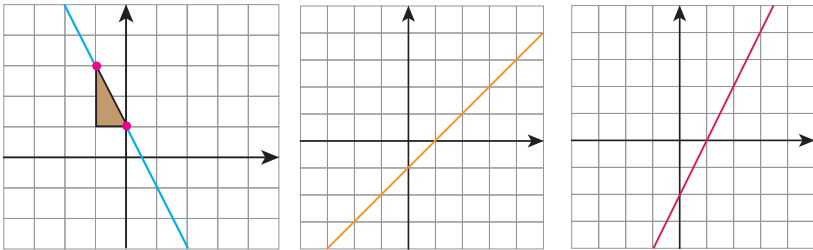
$$4x - 2y = 8$$

$$2x - y = 3$$

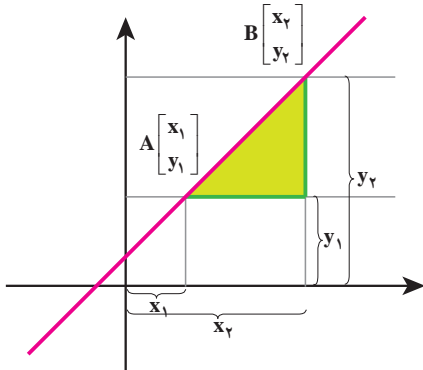
۴- خط  $y=ax+b$  را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط‌های زیر را بنویسید.



۶- معادله خطی بنویسید که با خط  $2y-4x=5$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  بگذرد.  
۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.

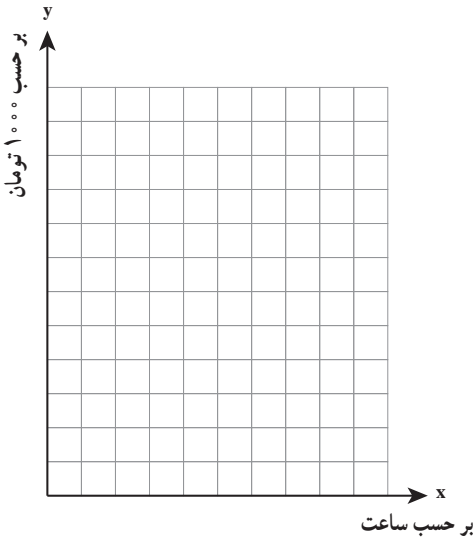


$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸-  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$  دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

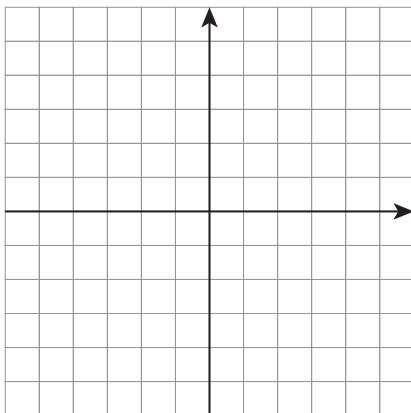
فعالیت

۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه کلی  $x$  ساعت استفاده از اینترنت را با  $y$  نشان دهید و رابطه‌ای بین  $y$  و  $x$  بنویسید.



یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک ( $y$ ) و  $x$  ساعت استفاده از اینترنت را در این حالت بنویسید.

دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه ویژگی‌ای دارد؟ برای  $1/5$  ساعت استفاده، کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟



۲- معادله  $y=2x-1$  چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید.

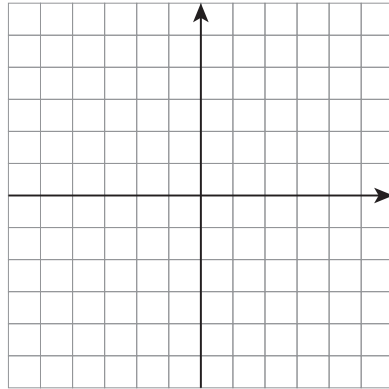
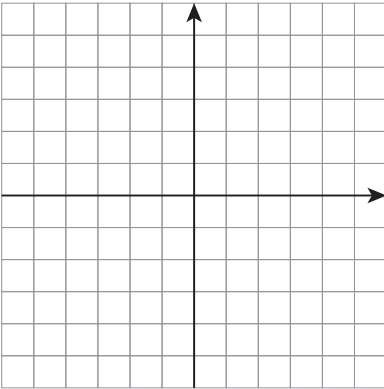
معادله  $y=-x+2$  چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید. توضیح دهید چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.

## کار در کلاس

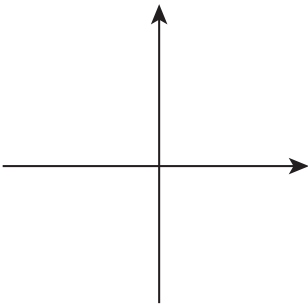
با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$



## فعالیت



۱- خط  $2x - 3y = 4$  را رسم کنید. خط به معادله  $4x - 6y = 8$  را که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است، رسم کنید.

الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟

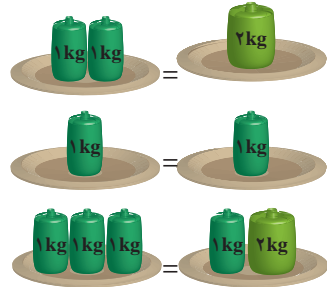
ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله خط را در یک عدد ضرب کنیم

ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بی‌شمار جواب

دارد؟ چرا؟

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید :



$$\begin{array}{r} 2 = 2 \\ + 5 = 5 \\ \hline 7 = 7 \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{array}{r} x = x \\ + 2x = 2x \\ \hline 3x = 3x \end{array} \quad \text{ب)}$$

ج)

از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، \_\_\_\_\_  
 ۳- با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{array} \right. \\ \hline 2x = 4 \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$x = 2 \quad \text{و} \quad x + y = 3$$

$$2 + y = 3 \rightarrow y = 1$$

$$\text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right. \\ \hline 5x = 10 \end{array} \quad \text{ب)}$$

$$x = 2 \quad \text{و} \quad x + 2y = 4$$

$$2 + 2y = 4$$

$$2y = 2 \rightarrow y = 1$$

$$\text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یکی از راه‌های حل کردن دستگاه معادله‌های خطی، حذف کردن  $x$  یا  $y$  است تا به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ نام این روش، حذفی است.

## کار در کلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases}$$

۱- دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

(راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ بنابراین مقدار  $y$  را از معادله پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید؛ نام این روش، جایگزینی است).

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5$$

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی‌متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش‌آموز حل شده است. روش‌های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۱:

$2x - 3$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل

$$\text{محیط} = 2(x + 2x - 3) = 24$$

روش ۲:

$y$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 2y = 24 \end{cases}$$


---


$$-y - 2y = 3 - 24$$

روش ۳:

$y$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow 2(x + 2x - 3) = 24$$

بین روش‌های اول و سوم چه شباهتی هست؟

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$$

### تمرین

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} 2(x - y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x - y) = 7 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

۲- یک جواب برای  $x$  و  $y$  طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$۲^{2x-y-2} = 3^{x+y-1}$$

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط  $x-y=1$  و  $x+y=1$  بگذرد و شیب آن

$$-\frac{2}{3}$$
 باشد.

۴- در معادله  $y=ax+1$  اگر به جای  $a$  عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله خط‌های زیادی به دست

می‌آید. به ازای  $a=1$  و  $a=2$  و  $a=-1$  این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه

چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله

به دست نمی‌آید.

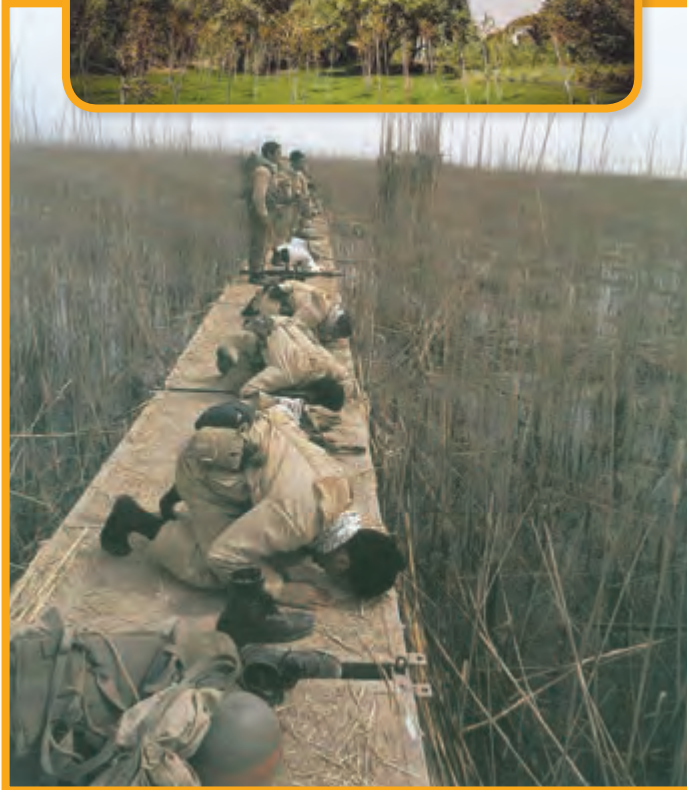
۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل

دستگاه معادلات به دست آورید.





پل طبیعت (تهران)



پل خیمبر

پل ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول هایی به دست می آید که بایک عبارت گویا بیان می شوند. مثلاً در مورد پل های عابر پیاده بار محاسباتی از دستور  $200 + \frac{1500}{L+50}$  به دست می آید که در آن  $L$  طول بارگذاری شده بر حسب متر است.

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتی متر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل  $\frac{2}{3}$  باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر  $x$  را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن  $x+4$  است و نسبت عرض به طول را می توان با  $\frac{x}{x+4}$  نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{عرض} \quad \text{طول} = 12$$

عبارت  $\frac{x}{x+4}$  را، که نسبت دو چندجمله ای است، عبارت گویا می نامیم.

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد.

از عبارات های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر استفاده می شود؛ به طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت  $v_1$  طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت  $v_2$  بازگشته است، از رابطه  $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$  به دست می آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال های دیگر از این قرار است:

$\frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد a و b	$\frac{2k}{v^2}$	محاسبه جرم یک جسم با سرعت $v$ و انرژی جنبشی $k$
-----------------	-------------------------------	------------------	--

با توجه به تعریف بالا عبارات های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^3}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad x^2+2x-7$$

اما عبارات های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

کدام یک از عبارات‌های زیر گویاست؟ چرا؟

$$\frac{7}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3+x}}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

## فعالیت

مقدار عددی عبارت  $\frac{x+5}{x-3}$  را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید:

x	-2	7	1/2	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$						

به ازای  $x=3$  مخرج عبارت گویای  $\frac{x+5}{x-3}$  مساوی صفر می‌شود و همان‌گونه که از قبل می‌دانید،  $\frac{\wedge}{\circ}$  به عنوان عدد تعریف نمی‌شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: عبارت گویای  $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟

حل: چه مقادیری مخرج کسر را صفر می‌کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی:

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا:

$$\begin{cases} (x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{یا} \\ (x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای  $x = 1$  و  $x = -2$  تعریف نشده است.

## کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف)  $\frac{8x+5}{2}$

ب)  $\frac{7+x}{x}$

ج)  $\frac{2b+1}{2b-1}$

د)  $\frac{3x}{x^2+4}$

ه)  $\frac{x}{x^2-1}$

و)  $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر  $\frac{36}{48}$  با کسرهای  $\frac{6}{8}$ ،  $\frac{9}{12}$ ،  $\frac{18}{24}$  و  $\frac{3}{4}$  مساوی است. بین این کسرها  $\frac{3}{4}$  کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای  $\frac{AC}{BC}$  داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0)$$

## فعالیت

هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است، راه حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف)  $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب)  $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

$$\text{ج) } \frac{y^2 - 9}{3y + 9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{د) } \frac{8ab^5}{2^0 a^2 b^3} = \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\text{ه) } \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

## کار در کلاس

۱- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

$$\text{الف) } \frac{m^2 - 16}{4 - m}$$

$$\text{ب) } \frac{6m + 18}{7m + 21}$$

$$\text{ج) } \frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$$

$$\text{د) } \frac{x^4 - y^4}{y - x}$$

۲- عبارت  $\frac{a+ax}{a}$  به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

$$\text{الف) } \frac{a + \cancel{ax}}{\cancel{a}} = a + x$$

$$\text{ب) } \frac{a + ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1 + x$$

## تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

$$\text{الف) } \frac{5x}{3ab^2}$$

$$\text{ب) } \frac{2y}{y(2y-6)}$$

$$\text{ج) } \frac{2P}{P^2 - P - 12}$$

$$\text{د) } \frac{2x+5}{x}$$

$$\text{ه) } \frac{x^2-1}{x+5}$$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

$$\text{الف) } \frac{3-x}{x^2-5x+6}$$

$$\text{ب) } \frac{4x^2+8x}{12x+24}$$

$$\text{ج) } \frac{24x^2}{12x^2-6x}$$

$$\text{د) } \frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y}$$

$$\text{ه) } \frac{1-t^4}{t^2+1}$$

$$\text{و) } \frac{6a^4b^2}{4ab^4}$$

۳- عبارتهایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

الف)  $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب)  $\frac{2y-3}{3-2y}$

ج)  $\frac{2y+3}{3+2y}$

د)  $\frac{2y+3}{-2y-3}$

۴- هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a+5}$	۳) $\frac{2-a}{a+5}$
۴) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۵) $\frac{a-2}{-a-5}$	۶) $\frac{2-a}{-a-5}$

۵- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت  $\frac{z(x+y)}{t}$  برابر است، مشخص کنید.

الف)  $\frac{z}{t}(x+y)$

ب)  $\frac{zx+y}{t}$

ج)  $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

د)  $z \times \frac{x+y}{t}$

ه)  $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$

و)  $\frac{zx}{t} + y$

۶- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف)  $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{\phantom{0000}}}{z(z^2+1)}$

ب)  $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{\phantom{0000}}}{x^2-x-6}$

ج)  $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5}(\boxed{\phantom{0000}})$

د)  $\frac{(x-5)(\boxed{\phantom{0000}})}{(x-2)(x-5)} = x+1$



حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $\frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4}$

ب)  $\frac{a^2 b + ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a + b)^2}$

ج)  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5}$

د)  $\frac{4x^2}{3xy^2} \div \frac{8x}{9y^5}$

## جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویاست؛ در مورد عددهای گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

## فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است راه‌حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

الف)  $\frac{3x + 7}{x + 2} + \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 + 2x - 3}{x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

ب)  $\frac{3x + 7}{x + 2} - \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 - (2x - 3)}{x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

ج)  $\frac{a^2 - 20}{a^2 - 4} + \frac{a - 2}{a + 2} =$

$$\frac{7}{10} + \frac{9}{5} = \frac{\hspace{1cm}}{10}$$

د)  $\frac{2}{x + 2} - \frac{x - 1}{x + 4} =$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \underline{\hspace{1cm}}$$



حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$

ب)  $\frac{6}{5x} - \frac{4}{x}$

ج)  $\frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2}$

د)  $\frac{7}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2+4x+3}$

### ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسرهای مرکب می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیر صفر) ضرب کرد.

### فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است راه حل را کامل کنید. ( $x \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \text{الف) } & \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \\
 \text{ب) } & \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \\
 & = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----}
 \end{aligned}
 \right\} 1)
 \end{aligned}$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \text{الف) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{a(a+1)\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}\right)}{a(a+1)\left(\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}\right)} = \text{-----} \\ \text{ب) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \\ a \neq 0 \text{ و } a \neq -1 \end{array} \right.$$

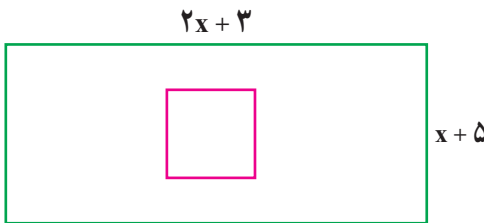
## کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است)

$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} =$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} =$$

## فعالیت



طول ضلع مربع داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل  $\frac{5}{26}$  باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

راه حل را کامل کنید و توضیح دهید: چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می آید؟

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{\text{-----}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{-----})^2$$

$$\text{مساحت مستطیل} = ( \quad ) ( \quad ) \quad \text{و} \quad \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{5}{26} = \frac{5}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{4( \quad )(2x+3)} = \frac{5}{26} \Rightarrow \frac{x+5}{4x+6} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

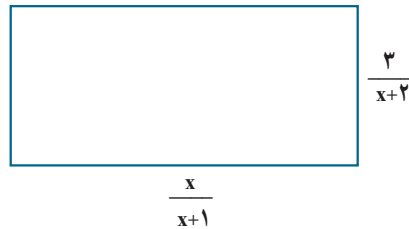
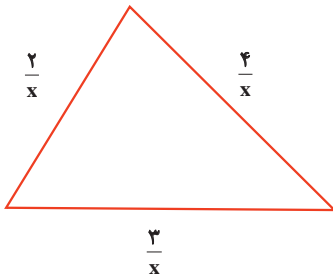
$$\Rightarrow 7x=35 \Rightarrow x=5$$

طول =

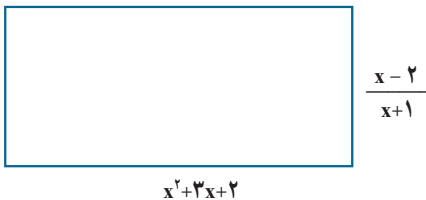
عرض =

## کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را بر حسب  $x$  به دست آورید و آن را ساده کنید. ( $x > 0$ )



۲- مساحت مستطیل زیر را بر حسب  $x$  به دست آورید. ( $x > 2$ )



## تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف)  $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16}$

ب)  $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{7-m}{m^2-1}$

ج)  $\frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x+18}$

د)  $\frac{1-c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4} \quad \text{ب) } \frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$$

$$\text{ج) } \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} \quad \text{د) } \frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2-x$$

۳- فقط یکی از عبارتهای گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2+5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2-5a}{a}$$

۴- از میان عبارتهای زیر، هر کدام را که مساوی عبارت  $\frac{x}{y}$  است، معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب) } \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج) } \frac{3x}{3y} \quad \text{د) } \frac{x^3}{y^3} \quad \text{ه) } \frac{a^2x}{a^2y}$$

۵- عبارت  $\frac{-x+3}{x+5}$  با کدام یک از عبارتهای زیر برابر است؟

$$\text{الف) } -\frac{x+3}{x+5} \quad \text{ب) } -\frac{x-3}{x+5} \quad \text{ج) } \frac{x-3}{x+5} \quad \text{د) } -\frac{3-x}{x+5}$$

۶- کدام یک از عبارتهای زیر به درستی ساده شده است؟

$$\text{الف) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5 \quad \text{ب) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$$

۷- اگر  $A=a^2-b^2$  و  $B=a^2+b^2$  و  $C=2ab$ ، حاصل عبارت  $\frac{A^2-B^2}{C^2}$  را به دست آورید.

۸- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید. (همه عبارات‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود).

الف)  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ب)  $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$

ج)  $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5}$

د)  $\frac{a-b}{b-a} = 1$

ه)  $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$

و)  $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$

ز)  $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$

ح)  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.  
 ۱۰- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف)  $\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}} - a$

ب)  $\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها  $\frac{a-2}{a+7}$  شود.

ب) حاصل جمع آنها  $\frac{a-2}{a+7}$  شود.

$\frac{x^2-x-12}{x-4}$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب  $x$  به دست آورید.  
 مساحت مستطیل  $x^2-9$  است.

$A=x^2-9$

۱- تقسیم تک جمله‌ای بر تک جمله‌ای (در تمام این درس مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

- برای تقسیم دو تک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^4}{27x^6z} = \frac{-2a^2z^3}{3x^5} \quad \text{مثال}$$

## ۲- تقسیم چند جمله‌ای بر تک جمله‌ای

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  اعدادی صحیح و  $d$  عددی صحیح و غیر صفر باشد، داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای  $12x^3 - 18x + 2$  بر  $6$  به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

## فعالیت

توضیح دهید: هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؟ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) 
$$\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} = \frac{2a^4}{4a^2} + \frac{5a^3}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} =$$

ب) 
$$\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

ج) 
$$(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2} =$$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{-21a^y b^z c}{28ab^6}$$

$$\text{ب) } \frac{24x^6 y - 2z + 3xyz}{x^2 z}$$

### ۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{r} 26 \quad | \quad 8 \\ -24 \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقی مانده می‌نامیم. رابطه‌های تقسیم بالا به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3 \times 8 + 2 = 26 \\ 2 < 8 \end{cases}$$

مثال: چند جمله‌ای  $2x^2 - 7x - 15$  را بر چند جمله‌ای  $x - 5$  تقسیم کنید.

چند جمله‌ای  $2x^2 - 7x - 15$  را مقسوم و  $x - 5$  را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان‌های متغیر موجود (در اینجا  $x$ ) از بزرگ به کوچک مرتب کرد. در مثال ما چندجمله‌ای‌های مورد نظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:  $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصل ضرب  $2x$  در  $x - 5$  را به دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = +3x - 15$$

برای آسان تر شدن، می‌توانیم پس از محاسبه حاصل ضرب  $2x$  در  $x - 5$ ، در پیراوند<sup>۱</sup> (کادر) بالا

علامت عبارت حاصل را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم؛ یعنی:

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\
 + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\
 \hline
 \phantom{2x^2} - 3x - 15
 \end{array}$$

اکنون دوباره  $3x - 15$  را بر  $x - 5$  تقسیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم؛ یعنی اولین جمله عبارت  $3x - 15$  را بر اولین جمله  $x - 5$  تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که این چند جمله‌ای‌ها نیز باید

$$\frac{3x}{x} = 3 \quad \text{داریم؛ باشند؛ داریم}$$

این تقسیم‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\
 \pm 2x^2 \mp 10x \quad \quad 2x + 3 \\
 \hline
 \phantom{2x^2} 3x - 15 \\
 \phantom{2x^2} \pm 3x \mp 15 \\
 \hline
 \phantom{2x^2} 0
 \end{array}$$

وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

## فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r}
 \text{الف)} \quad 4x^3 - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\
 \pm 4x^3 \quad \quad \mp 8x \quad \quad \boxed{x} \\
 \hline
 \phantom{4x^3} - 3x^2 + 9x + 7
 \end{array}$$

باقیمانده این تقسیم چیست؟

$$\begin{array}{r}
 \text{ب)} \quad x^2 - 5x - 24 \quad | \quad x - 8 \\
 \phantom{x^2} \quad \quad \quad \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}
 \end{array}$$



۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. راه حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r} 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\ \hline 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad 2x^2 - 3 \\ \hline +10x^4 - 15x^2 \quad \quad \quad 5x^2 + \square \\ - \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \hline \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم:

$$(5x^2 + \square)(2x^2 - 3) + \text{---}$$

$$= \text{---}$$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19$$

و درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه  $2x^2 - 3$  کمتر است.

## کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف)  $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad 2 - x$

ب)  $-x^3 - 12 + 8x \quad | \quad x + 6$

## تمرین

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف)  $\frac{-2x^2y^3z^4}{18xz^5}$

ب)  $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2}$

ج)  $(x^2 - 27) \div (x - 2)$

د)  $(3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$

ه)  $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

$$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad | \quad 1 - x^3$$

تقسیم نشان دهید.

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با  $2x^2 + 15x + 28$  است. اگر ارتفاع این

جعبه  $x$  و طول آن  $x + 4$  باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله‌ای  $10x + a - 23x^2 + 20x^2$  بر  $4x + 3$  بخش پذیر باشد،  $a$  را به دست آورید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت  $2x^2 - 9x + 9$  را بر هر یک از عبارت‌های زیر به دست آورید.

$$2x + 3 \quad \text{و} \quad 2x - 3 \quad \text{و} \quad x - 3 \quad \text{و} \quad x + 3$$



گنبد قابوس بنایی تاریخی از سدهٔ چهارم هجری است که در شهر گنبد کاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج **استوانه‌ای** که گنبدی **مخروطی** شکل روی آن قرار گرفته است، ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل **منشور** روی بدنهٔ استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

## درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: منشوری، کره و هرمی.

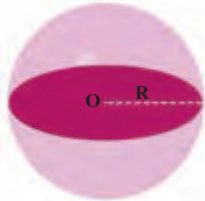


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره‌ای است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره‌ای را نام ببرید.

### فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.



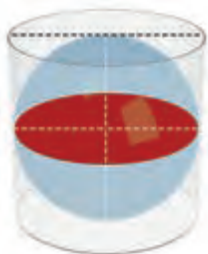
با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

کره مجموعه \_\_\_\_\_ از فضا است که \_\_\_\_\_ مرکز \_\_\_\_\_ هستند. به این اندازه \_\_\_\_\_ می‌گوییم.



۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
- مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.



● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید، به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره  $R$  باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب  $R$  نشان دهید.

ارتفاع استوانه :

شعاع قاعده استوانه :

حجم استوانه :



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

ج) بنابراین حجم کره ——— برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد،

دستور محاسبه حجم کره به شعاع  $R$  را به دست آورید.

$$\text{حجم کره ای به شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می‌آید.}$$

## کار در کلاس

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع  $10$  سانتی‌متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

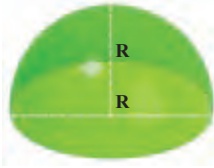
۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع  $10$  سانتی‌متر را به دست آورید.



مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید، برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرند و سطح نیم کره نیز دیده نشود.

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ درباره مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفت‌وگو کنید.



ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع  $R$ ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).  
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: \_\_\_\_\_  
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع  $R$  برابر است با: \_\_\_\_\_

مساحت یک کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $S=4\pi R^2$

## کار در کلاس

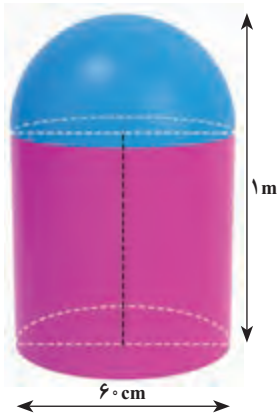


۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع  $10$  سانتی متر را پیدا کنید.

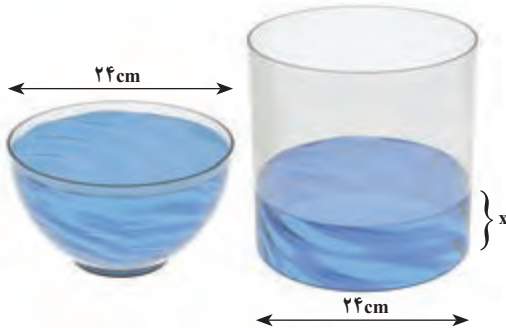
۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع  $10$  سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود  $۱۲۸۰۰$  کیلومتر است.  
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.  
 ب) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید.  
 ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود  $۱/۶۴۸/۰۰۰$  کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



- ۲- یک استوانک<sup>۱</sup> (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیمکره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده استوانک  $۶۰$  سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به دست آورید.  
 اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به  $۱۰۰$  گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

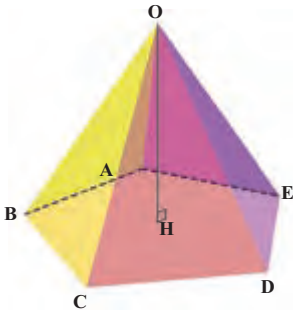


- ۳- پیمانه‌ای به شکل نیمکره و به قطر دهانه  $۲۴$  سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

## درس دوم: حجم هرم و مخروط



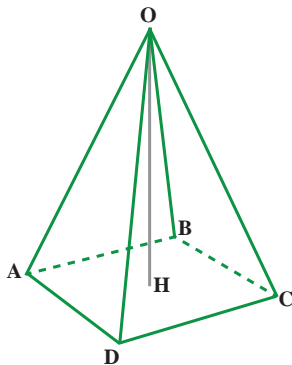
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونه دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید.



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل، نام رأس: ..... تعداد وجه‌ها: ..... شکل وجه‌ها: ..... شکل قاعده: ..... نام قاعده: .....

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل،  $OH$  بر قاعده  $ABCDE$  عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت  $OABCDE$  خوانده می‌شود.

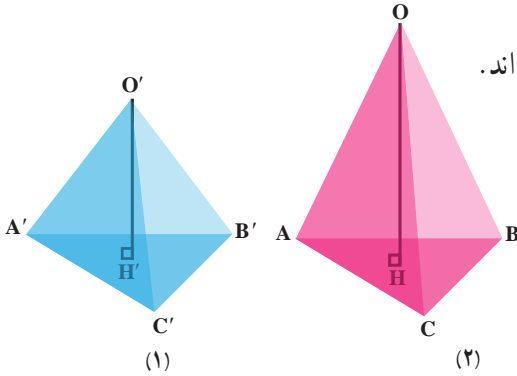
### فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل، نام رأس: ..... ارتفاع: ..... شکل قاعده: ..... شکل وجه‌های جانبی: ..... تعداد وجه‌ها: .....

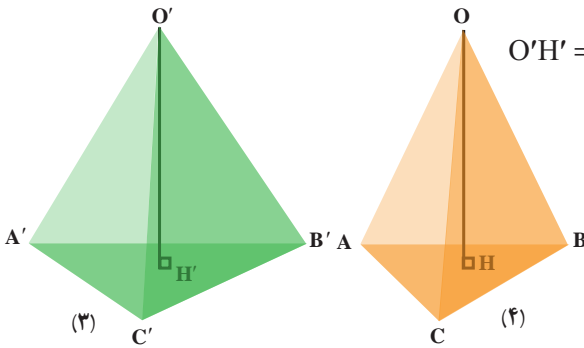
۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در

شکل های (۱) و (۲) مثلث های قاعده هم نهشت اند.



$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل های (۳) و (۴) ارتفاع ها برابر است.



$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟

ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه

حدهای می زنید؟

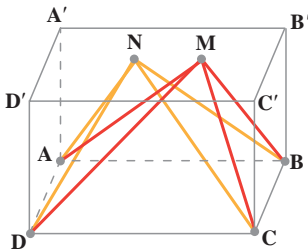
د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های

آنها چه می توانید بگویید؟

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های

آنها با هم برابر است.

## کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و

M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا

هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟

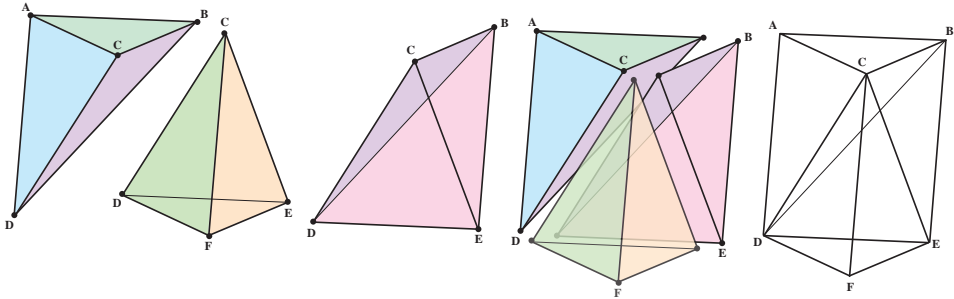
به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا

حجم یکسان داشته باشند؟



## محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشوری با دو قاعده  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$  را می بینید. نقطه  $C$  را به نقطه های  $D$  و  $E$  و نقطه  $B$  را به نقطه  $D$  وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.

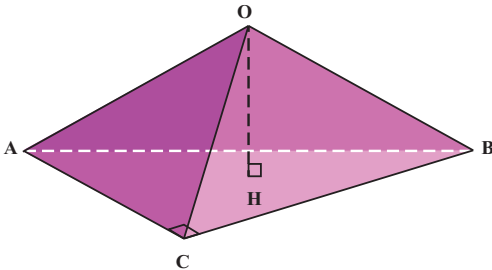


- ۱- چهارضلعی  $ABED$ ، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث های  $ABD$  و  $BDE$  هم مساحت اند؟
- ۲- چرا هرم های  $CBAD$  و  $CBED$  دارای حجم های برابرند؟
- ۳- چرا مثلث های  $ABC$  و  $DEF$  هم مساحت اند؟
- ۴- چرا هرم های  $CDEF$  و  $DABC$  دارای حجم های برابرند؟
- ۵- با توجه به پاسخ سؤال های ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟

حجم هر هرم با مساحت قاعده  $S$  و ارتفاع  $h$  برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

## کار در کلاس



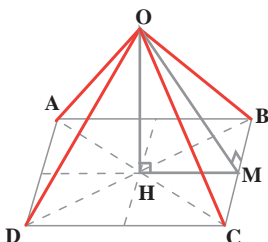
در هرم  $OABC$ ،  $AC = 6\text{cm}$  و  $BC = 1\text{cm}$  و زاویه  $\hat{ACB} = 90^\circ$  و  $OH$  ارتفاع هرم مساوی  $5\text{cm}$  است. با کامل کردن عبارات های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{\text{---} \times \text{---}}{\text{---}} = \text{---} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \text{---} \times \text{---} = \text{---} \text{ cm}^3$$

## فعالیت

۱- در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها  $10 \text{ cm}$  و  $M$  وسط  $BC$  است.



(الف) پاره خط  $OM$  در مثلث  $OBC$  چه خواصی دارد؟

(ب) مثلث  $OBM$  چه نوع مثلثی است؟

(ج) اگر طول ضلع قاعده،  $12 \text{ cm}$  باشد، به کمک قضیه فیثاغورس

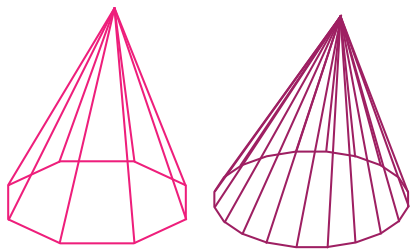
در مثلث  $OBM$  طول  $OM$  را حساب کنید.

(د) مثلث  $OMH$  چه نوع مثلثی است؟ طول  $MH$  چقدر است؟

(ه) به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث  $OMH$ ، طول  $OH$  را

به دست آورید.

(و) حجم هرم  $OABCD$  را به دست آورید.



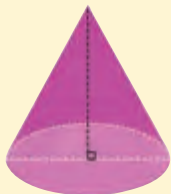
۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک

چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم،

شش ضلعی منتظم و ... . حال تعداد ضلع‌های این

چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه

شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟

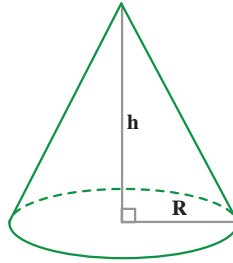


مخروط، شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و

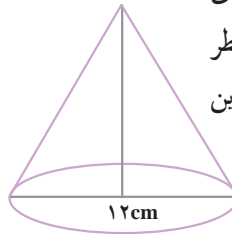
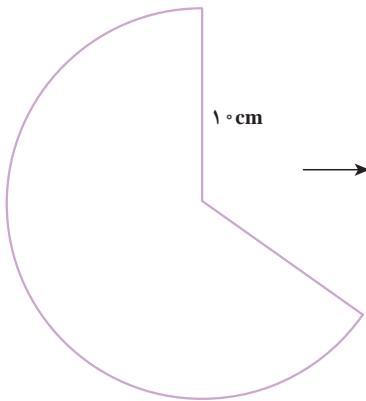
پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می‌شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



## کار در کلاس



علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10 cm، مخروطی به قطر قاعده 12 cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

## تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد 6 و 5 سانتی متر و ارتفاع آن 10 سانتی متر باشد.

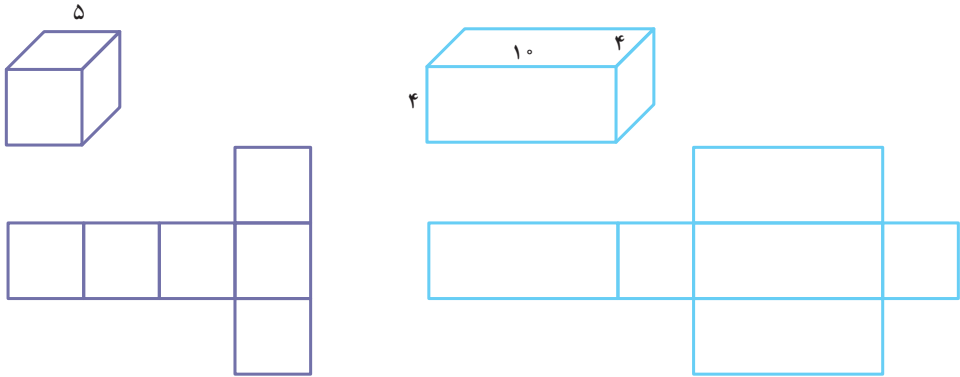
۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های 8 cm باشد.

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه 4 cm و به ارتفاع 12 cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن 6 cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

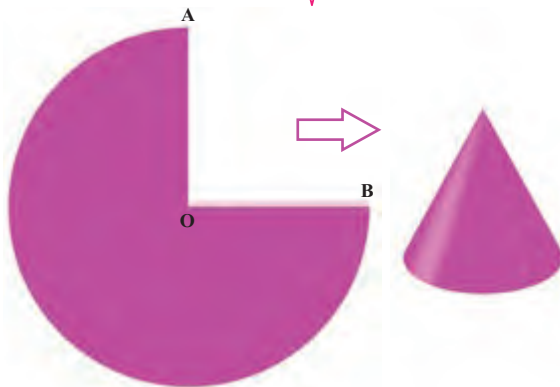
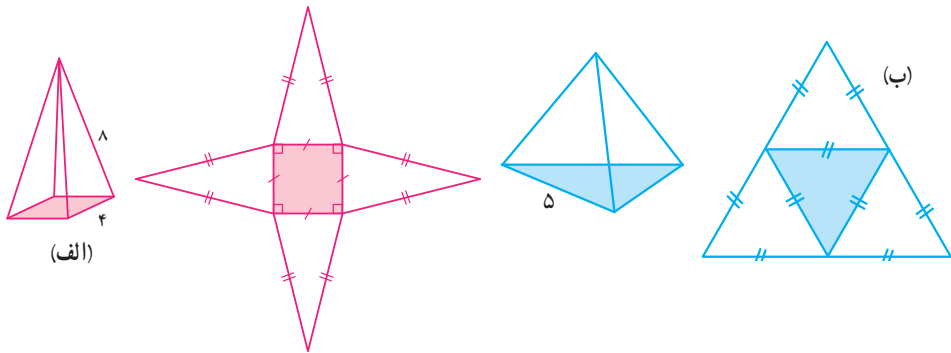


فعالیت

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.

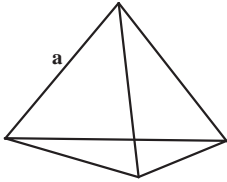


۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

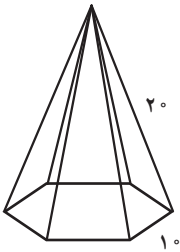


۳- با  $\frac{3}{4}$  دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی متر یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

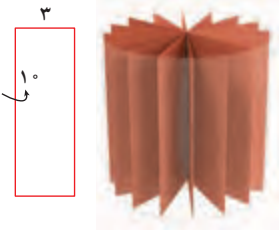


۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید. طول همه یال‌های آن  $a$  است.



۲- با توجه به اندازه‌های داده‌شده، گستردهٔ هرم را رسم کنید و مساحت جانبی آن را به دست آورید.

## فعالیت

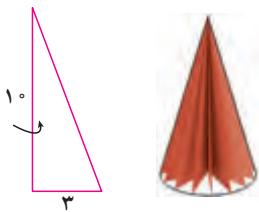


۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟

شعاع قاعدهٔ شکل حاصل : .....

ارتفاع شکل حاصل : .....

حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



۲- اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل،

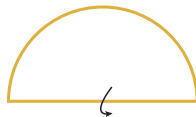
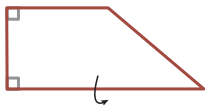
دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید.

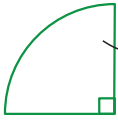
شعاع قاعدهٔ شکل حاصل : .....

ارتفاع شکل حاصل : .....

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل

را توصیف کنید.

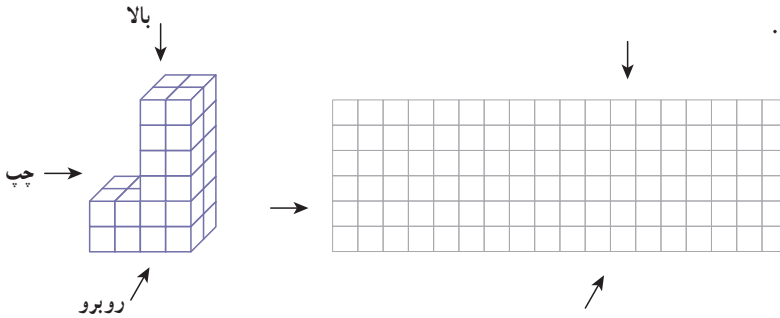




حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

فعالیت

۱- با توجه به حجم زیر، در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.

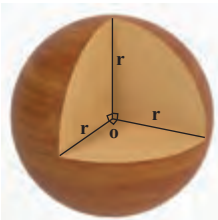


۲- اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟

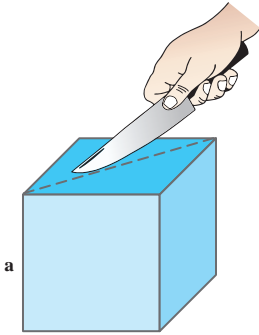
- الف) هرم منتظم با قاعده مثلث
- ب) هرم منتظم با قاعده مربع
- ج) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $a$  را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

## تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

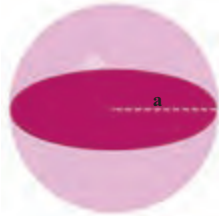
مکعب به ضلع  $a$



$$V =$$

$$S =$$

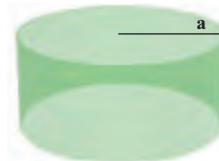
کره به شعاع  $a$



$$V =$$

$$S =$$

استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده  $a$



$$V =$$

$$S =$$

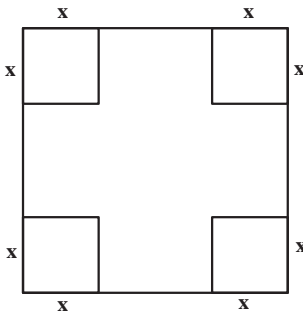
استوانه به ارتفاع و قطر قاعده  $a$



$$V =$$

$$S =$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ( $\frac{V}{S}$ ) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



۲- از یک مقوا به ضلع  $a$  گوشه های مربع شکل به ضلع  $x$  را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای باید بین  $a$  و  $x$  باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع  $x$  داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره مجاورش و به دیواره جعبه مماس باشد؟





معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب کتاب های درسی از طریق سامانه «نظرسنجی از محتوای کتاب درسی» به نشانی «[nazar.roshd.ir](http://nazar.roshd.ir)» یا نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴ - ۱۵۸۷۵ ارسال کنند.

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی